

**AYUDAS HIPERMEDIALES DINÁMICAS (AHD) PARA LA INTERPRETACIÓN DE
LOS DIFERENTES TIPOS DE INTERVALOS EN LA RECTA REAL CON
ESTUDIANTES DE GRADO ONCE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LUÍS EDUARDO CALVO CANO DEL MUNICIPIO DE CIRCASÍA, QUÍNDIO**

GIOVANY OSPINA OSPINA

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, COLOMBIA**

2018

**AYUDAS HIPERMEDIALES DINÁMICAS (AHD) PARA LA INTERPRETACIÓN DE
LOS DIFERENTES TIPOS DE INTERVALOS EN LA RECTA REAL CON
ESTUDIANTES DE GRADO ONCE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA
LUÍS EDUARDO CALVO CANO DEL MUNICIPIO DE CIRCASÍA, QUÍNDIO**

GIOVANY OSPINA OSPINA

**Trabajo de grado para optar al título de
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

Director

Ms C. JOSÉ FRANCISCO AMADOR MONTAÑO

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA.
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, COLOMBIA**

2018

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del jurado

Firma del jurado

Firma del director

Pereira. Octubre del 2018

*A la memoria de mis abuelos, que los quiero y siempre los recuerdo,
a pesar de que ya no están aquí físicamente su presencia siempre me
acompañará, a mis padres y mi esposa que son mi apoyo incondicional.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por ser parte de una hermosa familia que me apoya incondicionalmente y a mi esposa por ser un pilar muy importante en mi vida.

De manera muy especial agradezco a mi director de trabajo de grado, José Francisco Amador Montaña, Msc. el cual más allá de una asesoría me brindó su confianza y apoyo en todo momento, ofreciéndome la grandiosa oportunidad de participar en su macroproyecto para así impulsarme a emprender caminos en la investigación, al estar siempre presto a orientarme y resolver mis dudas.

*Al programa becas para la excelencia docente del **MEN**, por el financiamiento de mi formación de posgrado en la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, en el Departamento de Risaralda.*

A mis compañeros de curso, especialmente a Gladys, Arlex y Jhon Fredy por el apoyo no sólo en las actividades académicas, sino también por haberme ofrecido su amistad.

Gracias a los directivos de la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano donde laboro, a la Secretaria de Educación Departamental del Quindío y a cada una de las personas que de manera directa o indirecta han formado parte de este proceso.

CONTENIDO

RESUMEN	1
ABSTRACT	2
INTRODUCCION	3
CAPITULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1.1. DESCRIPCION DEL PROBLEMA.....	4
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	5
1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	6
1.3.1. Objetivo general	6
1.3.2. Objetivos específicos	6
1.4. JUSTIFICACIÓN	7
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO	9
2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	9
2.1.1. Investigaciones sobre el uso de AHD en la enseñanza.....	9
2.2. BASES TEÓRICAS	12
2.2.1. Enfoque Pedagógico Socio-constructivista	12
2.3. TEORÍAS DE APRENDIZAJE.....	20
2.3.1. Aprendizaje Autónomo	20
2.3.2. Aprendizaje Colaborativo.....	23
2.3.3. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).....	26
2.4. CONCEPTOS BÁSICOS	29
2.4.1. Intervalos en la recta real	29
2.4.2. La importancia de la Recta Numérica.....	30
2.4.3. Conceptos básicos sobre intervalos	31
2.4.4. Notación.....	31
2.4.4.1. Intervalo abierto	32
2.4.4.2. Intervalo cerrado	32
2.4.4.3. Intervalo semiabierto	33

2.4.4.4. Intervalos con infinito.....	34
2.4.5. Consideraciones finales de la representación en la recta.....	37
2.5. SABERES TECNOLÓGICOS Y PEDAGÓGICOS DEL CONTENIDO (TPACK) (KOEHLER ET AL. 2015).....	38
2.5.1. Los desafíos de enseñar con tecnología.....	39
2.5.2. Conocimiento sobre el contenido	39
2.5.3. Contenido Pedagógico	40
2.5.4. Conocimiento Pedagógico del Contenido.....	40
2.5.5. Conocimiento sobre la Tecnología (TK) (Koehler et al. 2015).....	40
2.6. EL CUARTETO DEL CONOCIMIENTO (KQ)	41
2.6.1. Códigos claves (Torres & Deulofeu, 2015).....	42
2.7. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE LEE S. SHULMAN	43
2.7.1. Conocimiento del Contenido	44
2.7.2. Conocimiento de la Didáctica Específica	44
2.7.3. Conocimiento del Estudiante	45
2.8. MODELO VAN HIELE	45
2.9. AMBIENTES DE APRENDIZAJE.....	48
2.9.1. El entorno.....	48
2.9.2. El ambiente	48
2.9.3. El clima de aprendizaje.....	49
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	50
3.1. DISEÑO CUALITATIVO DESCRIPTIVO.....	50
3.2. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN	51
3.3. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN	51
3.3.1. Técnica de observación participante.....	51
3.3.2. Registro video-gráficos.....	52
3.3.3. Los cuadros de trabajo.....	53
3.4. DISEÑO DEL MODELO PEDAGÓGICO PARA LA INTERPRETACIÓN DE LOS DIFERENTES TIPOS DE INTERVALOS EN LA RECTA REAL	53
3.5. PROCEDIMIENTO	56
3.5.1. Fases, objetivos y actividades de estudio	56

3.6. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA AHD	58
3.6.1. Diseño de la Secuencia Didáctica (SD)	58
3.7. DISEÑO Y ORGANIZACIÓN DEL AMBIENTE DE APRENDIZAJE.....	59
3.7.1. Contexto Físico	60
3.7.2. Rol del estudiante	60
3.7.3. Rol del docente	60
3.8. EVALUACIÓN DE LA AHD.....	61
CAPITULO 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	62
4.1. CLASIFICACIÓN DE LAS INTERPRETACIONES	63
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	64
5.1. CONCLUSIÓN 1	64
5.2. CONCLUSIÓN 2.....	65
5.3. CONCLUSIÓN 3.....	66
5.4. CONCLUSIÓN GENERAL	67
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

LISTADO DE TABLAS

Tabla 1. Fases, objetivos y actividades.....	57
Tabla 2. Clasificación de las interpretaciones.	63

RESUMEN

Este macroproyecto de investigación busca determinar los aportes didácticos de las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de grado once, de acuerdo al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto, y estrategias comunicativas en el aula de clase. Para tal efecto cada coinvestigador determinará un concepto del área de matemáticas donde los docentes hayan encontrado dificultades para orientar la clase y conseguir el logro de las competencias correspondientes. Con esta información se dará lugar a la creación de una AHD para el apoyo de cada clase de matemáticas, desde un enfoque socioconstructivista apoyado en el aprendizaje colaborativo, aprendizaje autónomo y aprendizaje basado en problemas. Esta herramienta se utilizará con los estudiantes y se valorará su uso y pertinencia en la enseñanza de las matemáticas así como los resultados de aprendizaje.

Para que la institución educativa aproveche la AHD, se ha determinado trabajar en una situación problema frecuente en estudiantes de grado once. Es por esto que el tema que se va a desarrollar es la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, los cuales pueden ser de diferentes tipos (abiertos, cerrados, entre otros), lo que genera confusión por parte de los alumnos. Por lo anterior este trabajo aborda la pregunta de investigación, ¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas en la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, con estudiantes de grado once, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase?

ABSTRACT

This macro research project, aims to determine the didactic contributions of the Dynamic Hypermedia Aids (AHD) in the teaching of mathematics with students of the last year in high school. Regarding the use and creation of educational material, adaptation of educational resources to the context, and communicative strategies in the classroom. For this purpose, each co-researcher will determine a class topic in the area of mathematics wherein teachers have found difficulties in guiding the class to achieve the corresponding competences. This information will lead an AHD for the support of each math class, from a socio-constructivist approach based on collaborative learning, autonomous learning and problem-based learning. The use of this tool with students, and their use and relevance in the teaching of mathematics as well as learning outcomes will be valued. In order for the educational institution take advantage of the AHD, it has been determined to work in a problematic situation that is frequent in students of the last year in high school. Thus the topic that is going to work is the interpretation of the different types of intervals in the real line, which can be of different types (open, closed, among others) which generates confusion in the students. Therefore, the research question is: What didactic contributions does it offer, for students of the last year in high school, the use of Dynamic Hypermedia Aids (AHD), in the interpretation of the different types of intervals in the real line, use and creation of educational material, adaptation of educational resources to the context and communicative strategies in the classroom?.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se realiza en el marco del macroproyecto de las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) para la enseñanza de las Matemáticas. Particularmente esta investigación busca determinar los aportes didácticos de las AHD, en la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, con estudiantes de grado 11 de la institución educativa Luís Eduardo Calvo Cano del municipio de Circasia Quindío, con el fin de que ellos se apropien de una manera pertinente del concepto tratado, haciendo un uso correcto de las alternativas que ofrecen las TIC, como recurso pedagógico.

La investigación es cualitativa de tipo interpretativo y está centrada en analizar la actuación del docente, Además se da a conocer los criterios qué se emplean en la selección del software, la elaboración del recurso educativo apoyados en el programa cmaptools y posterior reflexión sobre las posibilidades didácticas que ofrece la AHD en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase. Así también se comprobaba de alguna forma la AHD como instrumento relevante en el apoyo de las clases de matemáticas, desde un enfoque socioconstructivista, complementado con las teorías de aprendizaje autónomo, colaborativo y basado en problemas, además de otros sustentos teóricos.

CAPITULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Tomando como referencia los DBA (derechos básicos de aprendizaje) establecidos por el ministerio de educación nacional donde se hace mención a que el estudiante al cursar el grado once debe estar en condición de “*Comprender que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales*” (Gómez et al. 2016), esto también incluyendo desde luego el concepto de intervalo en sus diferentes formas a partir de la idea que se tiene de número real y la relación biunívoca que establece con la recta numérica (a cada número real le corresponde un punto en la recta y viceversa), aparece la dificultad que se hace evidente al inicio del año lectivo cuando se realiza una evaluación de diagnóstico para iniciar el curso y se encuentra que los estudiantes tienen grandes vacíos conceptuales al momento de tratar de determinar el conjunto numérico al cual pertenece cierto número o ubicar cualquier número real en la recta y aun es más difícil cuando se les habla específicamente de un intervalo en el cual pueden aparecer diferentes tipos de números, se considera si se toman sus extremos o no, se utilizan varias notaciones para su representación, se generaliza cuando se habla de un valor x o se menciona el intervalo hasta el infinito, entre otras situaciones.

De esta forma “*la calidad educativa es observable y cuantificable evaluando los resultados efectivos del aprendizaje frente a valores de referencia o normativos que se consideran válidos y significativos*” (Toranzos, 1996; Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), 1996; Díaz et al., 2006).

Lo anterior se sustenta en resultados bajos en pruebas externas, donde por lo regular aparecen preguntas relacionadas con el tema que los estudiantes no logran sortear adecuadamente. Por tratarse de un concepto fundamental para que los alumnos consigan responder de la mejor manera a los cursos de matemáticas en la educación superior, se debe

procurar porque este, no se convierta en un contenido más del área que contribuya a la deserción a futuro de los estudiantes de grado 11° egresados de la institución, en algunos cursos técnicos y de pregrado, como se presenta con frecuencia.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Hay quienes se atreven a decir que si nos tele-transportaran en el tiempo del siglo XIX a la actualidad, de las pocas cosas que no encontraríamos muy diferentes en su esencia sería un aula de clase, lo que nos demuestra que a pesar de los diferentes avances tecnológicos realizados por la humanidad, poco han logrado incidir en una transformación significativa de la forma como se realiza el proceso enseñanza-aprendizaje en las diferentes instituciones de índole educativo, especialmente las de nuestro país, es por esto que este trabajo está enfocado en tratar de conseguir una transformación de esta realidad y así poder lograr que en el aula se pueda contar con herramientas didácticas y tecnológicas que permitan al profesor realizar una labor más contextualizada, innovadora y efectiva en el sentido de conseguir los objetivos programados en el trabajo con los estudiantes en un ambiente sustentado por las TIC.

Los fundamentos teóricos se desarrollan a través de la lectura de diversos documentos, entre ellos, Amador et al. (2015).

Por lo anterior se plantea el problema de investigación, *¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas en la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, con estudiantes de grado once, en lo referente a uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase?*

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Objetivo general

Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas desde el enfoque socioconstructivista en la enseñanza del concepto de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real a estudiantes de grado 11°, en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase.

1.3.2 Objetivos específicos

- Diseñar un modelo pedagógico para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real en el aula de clase.
- Crear una ayuda hipermedial dinámica para apoyar el proceso de enseñanza del concepto, interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real.
- Crear una unidad didáctica con uso de la AHD para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real y aplicarlo en clase para valorar sus aportes didácticos.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta aparece como una necesidad que se considera tienen los estudiantes a la hora de trabajar el concepto de intervalos en la recta real en grado once, todo a partir de la experiencia adquirida en la orientación del concepto durante varios años en la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano, donde siempre es evidente que hay falencias y regularmente al avanzar en los temas son notables los vacíos conceptuales cuando se requiere como preconcepto para un tema relacionado.

Dentro de los estándares básicos de competencias en Matemáticas en su apartado de pensamiento numérico y sistemas numéricos se plantea la importancia de hacer entender el significado de los números “*Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos*” (Castaño, 2017). Con relación a lo anterior muchos estudiantes manifiestan un conocimiento no integrado de los distintos sistemas numéricos (Robinet, 1986), y dan muestra de su resistencia al abordar esta temática.

Esto no solo afecta el rendimiento académico en el área de matemáticas en el último grado de bachillerato sino también en los resultados en pruebas saber 11, lo que se constituye en una de las preocupaciones del área.

En esta línea la investigación en Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) aplicadas a la educación, buscan transformar de fondo los procesos educativos acorde a los nuevos entornos de aprendizaje de los estudiantes, teniendo en cuenta la importancia de los cambios de la dinámica social, en los modelos alternativos de enseñanza aprendizaje mediados por las TIC (Garrido, 2005).

Además, considerando que el estado colombiano por medio del Ministerio de Educación Nacional ha planeado la incorporación de las tecnologías en el aula como uno de los programas

estratégicos para mejorar la calidad y la competitividad de las personas y del país a través de programas como computadores para educar donde viene realizando grandes esfuerzos con el objetivo de cerrar la brecha digital y de conocimiento, mediante el acceso uso y aprovechamiento de las TIC en los establecimientos educativos del país. (Garrido, 2005).

Coherente a lo anterior, esta investigación pretende diseñar una propuesta didáctica innovadora que incorpore las AHD (Ayudas Hipermediales Dinámicas) en el aula de clase, mediadas por las TIC, al abordar el tema que tiene que ver con la interpretación de diferentes tipos de intervalos en la recta real, con estudiantes de grado once. Esta propuesta busca en la medida de lo posible, crear situaciones y objetos de aprendizaje que sirvan como herramienta de comunicación en un trabajo colaborativo donde sea posible hallar una relación entre lineamientos, competencias, estándares y logros apoyados en la tecnología, a partir de una situación problema que aparece de forma recurrente.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan como antecedentes algunas investigaciones publicadas que integran AHD como estrategia didáctica en la enseñanza, y otras que usan ambientes computacionales en el proceso de la enseñanza aprendizaje de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real con el propósito de demostrar en qué medida los recursos tecnológicos mejoran o aumentan la calidad del aprendizaje.

Sobre la incidencia del uso de las AHD en la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real a estudiantes de grado 11 no se encontraron estudios. Sin embargo, como estado del arte en esta investigación, consideramos algunas del Centro de Recursos Informáticos educativos, (CRIE) de la UTP, que se tienen con el uso de Ayuda Hipermedial Dinámica (AHD) para el aprendizaje, con la incidencia de las TIC y relacionadas con el uso de las de las mismas en temas acordes al objeto de estudio.

2.1.1 Investigaciones sobre el uso de AHD en la enseñanza

- El libro *“La Indagación Progresiva (IP) con Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en el currículo escolar del Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina”*, asesorado por un grupo de docentes de la Universidad Tecnológica de Pereira. (Amador et al. 2015).

El proyecto desarrolla una propuesta de formación pedagógica y didáctica de profesores para profesores; es una recopilación de experiencias de las prácticas pedagógicas de diferentes disciplinas que participaron, entre ellas las áreas de Física, Química, Biología, Filosofía, Ciencias sociales, Deontología, utilizando el concepto de AHD, dimensionado desde el

socioconstructivismo y la teoría del aprendizaje por Indagación Progresiva (IP), mediado por el uso de las TIC, estructurado en lo que se ha denominado Ayuda Hipermedial Dinámica (AHD).

- El Libro: “*Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en los proyectos de aula con TIC, otra forma de enseñar y aprender conjuntamente*” (Amador Montaña & otros, 2013).

El libro contiene los principales temas de los seis niveles de un proceso de formación, fundamentado en el socioconstructivismo medido por las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) como una propuesta pedagógica en TIC, que posibilita un cambio en las prácticas educativas de los maestros, acorde con las exigencias del momento. Hace parte del proceso de formación Computadores para Educar -Universidad Tecnológica de Pereira, convirtiéndose, por tanto, en un material útil como base de nuestra investigación.

En la actualidad los docentes en el mundo han tenido accesos a una gran cantidad de herramientas virtuales que ayudan a los procesos de formación mejorando los diferentes tipos de aprendizaje que percibe el estudiante y hacen de estos conocimientos significativos; Los desarrollos tecnológicos en relación a la información y la comunicación tienen sus orígenes en la edad moderna, (periodo comprendido entre los siglos XV al XVIII -temprana edad y los siglos XIX y XX como moderna), y en el siglo XX con la inserción de las computadoras en la educación se ha avanzado en los diferentes tipos de recursos tecno-pedagógicos los cuales son responsables de traer como consecuencias, experiencias de carácter significativo en todos los estudiantes.

Cárdenas (2017), en el trabajo titulado “*Estrategias didácticas de aprendizaje en matemática*”, señala las diferentes estrategias de enseñar matemáticas a nivel de bachillerato. Inicialmente recopila las dificultades presentadas por estudiantes en el momento de aprender conceptos aritméticos, algebraicos, trigonométricos o de otra clase. Allí también se propone estrategias didácticas diferentes y poco utilizadas como el cine, el juego, la resolución de

problemas, la modelación y la utilización de programas de computación. Demostrando que estas herramientas facilitan el aprendizaje y la asimilación de conceptos matemáticos que tienen alto grado de dificultad para la comprensión en muchos estudiantes colombianos.

Como se mencionó anteriormente aunque no hay trabajos puntuales en la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, Coriat & Scaglia (2000), en su trabajo titulado *“Representación de los números reales en la recta”*, mencionan la complejidad comparativa de la representación de números reales en la línea frente a otras representaciones. También mencionan la “naturaleza” de la controvertida línea y representa varias interpretaciones de la línea recta, además de la fenomenología particular relacionada con la asignación de números reales a los puntos de la línea, a fin de extraer algunas limitaciones de dicha asignación. Por último, comparan varias representaciones de números reales con la representación en la línea, presentando un conjunto de características distintivas para este último. Este documento, orientado teóricamente, proviene de un trabajo de investigación más amplio dirigido a descubrir obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la línea recta.

No obstante, en la internet se encuentra mucha información y actividades que tratan de explicar el tema central de esta investigación, como wikis o páginas con muchos recursos como test online o juegos, pero la dificultad a la hora de tratar de encontrar algo que sea de una forma más entendible para el estudiante es difícil, ya que este se ve abrumado por un sinnúmero de páginas y páginas que en muchas ocasiones no llevan al tema específico a tratar si no que abarca mucho más de lo que el educando necesita.

En los 90s el uso de flash contribuyó a una pequeña parte de docentes capacitados en este lenguaje a la creación de herramientas o juegos educativos pero con el cambio de la web a

web 2.0 y al manejo del HTML 5 se ha ganado terreno y hoy en día son más los docentes que recurren al uso de las TIC como instrumento de apoyo para orientar la clase.

2.2 BASES TEÓRICAS

En este apartado del trabajo se describen los fundamentos teóricos que sirven como base para la investigación. Así, los aspectos y características del enfoque pedagógico socio-constructivista, el referente metodológico de las teorías de los aprendizajes autónomo, colaborativo y basado en problemas (ABP), los aportes de otras teorías consideradas de notable importancia en nuestro campo como son los saberes tecnológicos y pedagógicos (TPACK), el cuarteto del conocimiento (KQ), el conocimiento didáctico del contenido de Lee S. Shulman, el modelo Van Hiele y los ambientes de aprendizaje, aparecen como sustento teórico. También se consideran las categorías conceptuales que abarcan nuestra propuesta según revisión bibliográfica: La incidencia didáctica que ofrecen las Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en la enseñanza relacionada con la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real.

2.2.1 Enfoque Pedagógico Socio-constructivista

El socio-constructivismo es una teoría psico-pedagógica que trata de abordar la incidencia del actuar sobre nuestra realidad y las transformaciones que se acontecen en esta interacción; en los procesos educativos el socio-constructivismo muestra el desarrollo humano como una construcción gradual de aprendizajes en el que las personas tienen un rol activo operante, marcados en una relación de intercambio socio-histórico-cultural.

Vigotsky (1978), sostiene que una persona puede, sentir, imaginar, recordar o construir un nuevo conocimiento si tiene un precedente cognitivo donde se ancle. Por ello el conocimiento

previo es determinante para adquirir cualquier aprendizaje, dado que es el producto de la influencia que ejerce en él, las personas, la cultura y el ambiente que lo rodea. Estos procesos de interacción social Vygotsky los denomina procesos inter-psicológicos.

Características del socio-constructivismo:

- Es un proceso dinámico de construcción de conocimientos.
- El conocimiento se establece a partir de la Dimensión constructivista – Dimensión social – Dimensión interactiva.
- El ser humano, actúa sobre una zona de desarrollo real (ZDR), la que consiste en lo que es capaz de hacer un estudiante sin ayuda, esto lo hace con el fin de transformar, y transformarse el mismo a través de instrumentos psicológicos.
- Zona de desarrollo próximo (ZDP): plantea, que se aprende en el ámbito social, por interacción y en forma deliberada, permitiendo que el sujeto se comprometa con actividades a realizar.
- El lenguaje como herramienta de interacción social. Vigotsky (1978), enmarca el lenguaje como la capacidad de pensamiento, la forma que tiene de hablar el estudiante con el mismo, “habla en silencio” El lenguaje es fundamental en todos los procesos de conocimientos al que el ser humano se enfrente.
- Internalización: transformación de los saberes a saberes individuales (Plano interpsicológico al plano intrapsicológico). El conocimiento se adquiere, primero a nivel interpsicológico y posteriormente a nivel intrapsicológico, de esta manera el factor social juega un papel determinante en la construcción del conocimiento. (Vigotsky, 1978).

Las tareas del proceso educativo desde el Socio-constructivismo

Cole (1993) propuso que, bajo un enfoque educativo como el presente, se debe buscar mostrar a los alumnos como construir conocimiento, pero promoviendo a la vez la colaboración en el trabajo académico a fin de que considere los múltiples abordajes que se puedan tener frente a un determinado problema, para fomentar así la toma de posiciones y de compromisos intelectuales (Torreblanca & Rojas-Drummond, 2010).

De esta forma Cole (1993) partiendo de sus investigaciones manifiesta que las tareas del proceso educativo desde el socioconstructivismo son:

- Mostrar al estudiante como construir el conocimiento (ayuda ajustada).
- Promover la colaboración en el trabajo académico.
- Expresar los múltiples enfoques que se pueden tener frente a un determinado problema
- Estimular la toma de posiciones y compromisos intelectuales.

Mediación:

Los mediadores son los diversos recursos, con los cuales el tutor o facilitador construye un andamiaje, en el que se apoya, en este caso pueden ser digitales o de otra naturaleza los cuales son un escalón diseñado para conducir a los alumnos hacia la independencia (Acosta Luévano, 2015).

El concepto de mediador y de aprendizaje mediado tiene su origen en la Teoría Sociocultural de Lev Vygotsky (1978), la cual operacionaliza a través de la llamada Zona de Desarrollo Potencial (ZDP) una forma de lograr aprendizajes duraderos y el desarrollo óptimo de un estudiante con la ayuda de los adultos o de otros estudiantes más avanzados.

En esta propuesta las actividades diseñadas, están mediadas por las AHD, la cual es una herramienta tecnológica virtual que está estructurada de tal forma que contiene todos los recursos didácticos a utilizar en los procesos de enseñanza aprendizaje en la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real.

Andamiaje:

Según Amador et al. (2015) los conceptos de “andamiaje”, se refieren a la función del maestro relacionada con el brindar soporte adecuado a los estudiantes durante el proceso didáctico y cuando en el mismo, el maestro debe ajustar la dirección y planeación para garantizar resultados satisfactorios y el cumplimiento de las metas de aprendizaje para todos los estudiantes.

En este aspecto, el maestro debe considerar con detenimiento las necesidades particulares de sus estudiantes, observando sus diferencias conceptuales, ritmos de aprendizaje su inclusión y capacidades excepcionales. Del mismo modo conforme el estudiante se vuelve más diestro, el profesor va retirando el andamiaje para que se desenvuelva independientemente (Amador et al. 2015).

Ayuda ajustada:

Según Onrubia (1995), la ayuda ajustada son las actividades desde sus propias posibilidades y de los apoyos o soportes que le brinde el maestro. El autor sostiene que cuando se habla de ayudas se hace referencia a un amplio abanico que tiene el docente para su actuación, desde la intervención directa con un alumno o un grupo de alumnos hasta la organización global de la situación: determinar la duración de una sesión-clase, elegir el espacio en el que tendrá lugar, seleccionar la disposición del mobiliario en un aula ordinaria, decidir el tipo de materiales

de consulta con que trabajarán los alumnos, establecer que las actividades habituales serán en pequeño grupo o con todo el grupo clase, presentar a los alumnos un contenido en un momento u otro del curso escolar o del ciclo, estructurar de una u otra forma los momentos de exposición o explicación, posibilitar o no determinadas formas de participación de los alumnos en el aula, permitir que incorporen cuestiones o elementos de su interés, ofrecerles determinados modelos de actuación, formularles indicaciones y sugerencias para abordar nuevas tareas, corregir errores, dar pistas, ofrecer posibilidades de refuerzo o ampliación, elogiar su actuación, valorar los esfuerzos o el proceso que han realizado... pueden ser todos ellos ejemplos de ayuda educativa y forman parte, todos ellos, de la tarea de enseñar (Onrubia et al. 1999).

Siguiendo el mismo autor afirma, que ofrecer una ayuda ajustada al aprendizaje escolar supone crear ZDP (Zona de Desarrollo Próximo) y ofrecer asistencia y apoyos en ellas, para que, a través de esa participación y gracias a esos apoyos, los alumnos puedan ir modificando en la propia actividad conjunta sus esquemas de conocimiento y sus significados y sentidos, y puedan ir adquiriendo más posibilidades de actuación autónoma y uso independiente de tales esquemas ante situaciones y tareas nuevas, cada vez más complejas (Onrubia et al. 1999).

Niveles de desarrollo

Zona de Desarrollo Próximo (ZDP):

Vygotski (1980), definió la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) como la distancia entre “el nivel de desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas” y el nivel más elevado de “desarrollo potencial y tal como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con iguales más capaces” (Vallejo, 1999).

Nivel de Desarrollo Real (NDR):

El NDR, es el conjunto de actividades que el sujeto puede hacer por sí mismo, de un modo autónomo, sin la ayuda de los demás. Aclara que en el aprendizaje escolar el niño trae conocimientos y saberes previos; en consecuencia, tanto aprendizaje como conocimiento están presentes desde el nacimiento (Vigostky., 1978).

Nivel de Desarrollo Potencial (NDP):

Es el nivel de actividades que podría alcanzar el sujeto con la colaboración y guía de otras personas, es decir, en interacción con los otros. En ella se determina el desarrollo de las funciones psicológicas individuales en la actividad colectiva y la interacción social del niño (Vigostky, 1978). Dicho en términos más generales, la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) es el espacio en que, gracias a la interacción y la ayuda de otros, una persona puede trabajar y resolver un problema o realizar una tarea de una manera y con un nivel que no sería capaz de tener individualmente.

De acuerdo con la caracterización de Vygotsky y sus continuadores, es en la ZDP donde el aprendiz puede ir adquiriendo más posibilidades de actuación autónoma y uso independiente de tales esquemas ante situaciones y tareas nuevas, cada vez más complejas (Onrubia et al. 1999). El mismo autor describe “... *es en esta zona donde el profesor puede actuar para ofrecer una ayuda ajustada, y construir andamiajes mediados por las Tic, para guiar a los alumnos a que comprendan los contenidos y apoyarlos en el desarrollo de sus competencias, sin perder la visión pedagógica socioconstructivista en el logro de los aprendizajes integrales*” (Coll et al. 1993).

Para concretar hay tres cuestiones que deben estar ya claras que pueden ocurrir según (Onrubia et al. 1999):

“La primera cuestión es que una misma forma de intervención o actuación del profesor puede, en un momento dado y con unos alumnos dados, servir como ayuda ajustada y favorecer el proceso de creación y asistencia en la ZDP, y en otro momento o con otros alumnos, no servir en absoluto como tal y no favorecer ese proceso, en función de los significados y sentidos que aporten los alumnos a la situación en cada caso concreto.

La segunda cuestión es que la enseñanza no puede, desde esta perspectiva, limitarse a proporcionar siempre el mismo tipo de ayudas ni a intervenir de manera homogénea e idéntica en cada uno de los casos.

La tercera cuestión es que, desde estas nociones, la dimensión temporal de las situaciones de enseñanza y aprendizaje adquiere una relevancia fundamental en el momento de decidir qué ayuda concreta puede ser más ajustada en cada caso o de analizar si una intervención específica realizada ha sido ajustada o no” (Coll et al. 1993).

Construcción de Significados Compartidos

La construcción compartida de significados a través del lenguaje, es un mecanismo interpsicológico del aprendizaje colaborativo, junto con la interdependencia positiva y las relaciones psicosociales. Implica: la producción conjunta de objetivos, planes y significados; interpretar y contribuir con explicaciones y argumentaciones; mediar y coordinar mutuamente las contribuciones, puntos de vista, críticas y roles en la interacción o exponer reflexiones individuales y colectivas (Fernández & Trigueros, 2016).

Según Mercer (2001), cada vez que dialogamos con una o más personas participamos en un proceso de colaboración en el que se negocian significados y se movilizan conocimientos comunes.

Procesos de Internalización

Según la teoría de Vygotsky (1978), toda función psicológica superior es externa porque fue social antes que llegar a ser una función psicológica individual, “... *En el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero entre personas (de manera interpsicológica) y después, en el interior del propio niño (de manera intrapsicológica)*”.

- Los procesos intrapsicológicos: son los procesos psicológicos que se dan al interior del niño. De manera individual.
- Los procesos interpsicológicos: Son aquellos que ocurren en la interacción, el intercambio de realidades y mundos en el contexto social.

En este sentido los procesos de internalización llevan a la autorregulación teniendo como punto de partida lo social y como punto de llegada lo individual. El proceso cognitivo y comunicativo se da a través del lenguaje, cuando el individuo interioriza esta serie de signos los convierte en instrumentos propios del pensamiento, es decir en medios de autorregulación.

Actividad conjunta

Se entiende como actividad conjunta, la interactividad de naturaleza esencialmente constructiva entorno a los saberes y tareas de aprendizaje, que potencien la comprensión y elaboración significativa de conocimientos que se construyen con las aportaciones de los participantes, promoviendo las capacidades de aprendizaje autónomo y autorregulado (Amador et al. 2015).

2.3 TEORÍAS DE APRENDIZAJE

2.3.1 Aprendizaje Autónomo

El aprendizaje autónomo es un proceso que permite a la persona desarrollarse independientemente, ser autor de su propio desarrollo, eligiendo los caminos, las estrategias, las herramientas y los momentos que considere pertinentes para aprender y poner en práctica de manera autónoma lo que ha aprendido (Gonçalves, 2011).

Para la autora es adecuado establecer procedimientos no solo para que el estudiante aprenda de forma autónoma, dentro de unos límites planificados, sino también para que reflexione sobre el proceso en el que está inmerso, de manera que, en el futuro, cuando su trabajo sea completamente autónomo, tenga criterios para planificarlo y gestionarlo.

Para lograrlo, el profesor diseña una actividad concreta, el alumno debe trabajar de forma guiada: para conseguir un determinado objetivo de aprendizaje. El alumno tendrá un margen de movimiento en su respuesta, pero siempre dentro de unos límites preestablecidos. Sin embargo, a la vez, debemos garantizar que adquiera unas habilidades que le permitan ir desarrollando esas actividades con un grado de autonomía creciente. La forma de conseguirlo consiste en exigir al alumno que desarrolle un proceso de reflexión para que sea consciente de su propia forma de aprender (Gonçalves, 2011).

Por consiguiente, se puede determinar que la ayuda tiene un doble sentido por un lado alude al hecho de entregar paulatinamente la responsabilidad del aprendizaje al estudiante y por otro, a que dicha ayuda proporciona las herramientas pedagógicas adecuadas y oportunas en la construcción significativa del conocimiento; estos aspectos son denominados mecanismos de influencia educativa y responden a las precisiones señaladas por Coll et al. (2008).

Los apoyos y ayudas del profesor al aprendizaje del estudiante, van evolucionando y se modifican para elaborar y reelaborar versiones sucesivas, cada vez más ricas, complejas y

válidas de las representaciones compartidas sobre los contenidos y tareas objeto de la actividad conjunta (Mercado & Montaña, 2015).

El traspaso paulatino de la responsabilidad y el control sobre el aprendizaje a los estudiantes, relacionado con los conceptos de “andamiaje”, que apunta a las zonas de desarrollo próximo que el profesor utiliza para ir ajustando las ayudas pedagógicas según las características de cada situación, facilitan la internalización de los contenidos a aprender, en un proceso inicialmente de mayor dependencia, mayor ayuda y a medida que el estudiante va asumiendo mayor responsabilidad en el proceso de aprendizaje el docente va quitando las ayudas, pues se considera que el estudiante es lo suficientemente autónomo para asumir su rol dentro de este proceso (Gutiérrez-Giraldo & López-Isaza, 2011).

En consecuencia, de lo anterior y el reconocer la educación como un proceso sociocultural, implica entonces aceptar que *“la enseñanza debe entenderse, como una ayuda al proceso de aprendizaje. Ayuda necesaria porque sin ella es altamente improbable que los alumnos lleguen a aprender, y a aprender de manera significativa. Pero solo ayuda, porque la enseñanza no puede sustituir la actividad mental constructiva del alumno ni ocupar su lugar”* (Amador et al. 2015).

Autorregulación

La autorregulación del aprendizaje fundamentada en el socioconstructivismo es considerada como un proceso en el cual el estudiante se involucra en las actividades de una manera consiente y reflexiva. Este nivel de consciencia está en el campo de que el mismo estudiante identifica sus posibilidades y sus limitaciones frente a la realización de la tarea (Huertas, 2009).

Según Zimmerman (2000), la autorregulación se entiende como “la capacidad de generar pensamientos, sentimientos y actuaciones por parte del estudiante, orientados a conseguir objetivos. La autorregulación más que una capacidad mental o una habilidad académica, es un proceso de autodirección mediante el cual los estudiantes transforman sus capacidades en habilidades académicas.

La Enseñanza Estratégica para la autonomía

Según Monereo (2007), la enseñanza para la autonomía o método didáctico de enseñanza estratégica consiste en ceder o transferir progresivamente el control de la estrategia, que en un primer momento ejerce de manera absoluta el profesor, al estudiante, a fin de que se apropie de ella y pueda empezar a utilizarla de manera autónoma.

Uso estratégico de Procedimientos

El uso estratégico de procedimientos, es responsabilidad fundamental de una enseñanza estratégica; en ella se transita desde un control externo y centrado en el profesor, cuando en un primer momento se presenta la estrategia, una segunda etapa en la que el alumno puede practicar la estrategia aprendida con la guía y orientación del docente, para finalmente pasar a una autorregulación interna, centrada en el alumno, cuando este, demuestre poco a poco un dominio cada vez más autónomo de la estrategia aprendida (Huertas, 2009).

Elementos del aprendizaje estratégico

A partir de las ideas de Díaz & Hernández (2002) y Valenzuela (2000) quienes sostienen que “*el aprendizaje estratégico se refiere a aquellos procesos internos*” constituidos por los procesos cognitivos, procesos metacognitivos y los afectivos emocionales.

Procesos cognitivos

Son procesos internos que permiten la activación sináptica a través de la cual se procesa la información y el conocimiento. El desarrollo de estrategias cognitivas, favorecer el conocimiento y el análisis de las condiciones en que se produce la resolución de un determinado tipo de tareas o el aprendizaje (Huertas, 2009).

Procesos metacognitivos

Vienen a ser los procesos mediante los cuales el sujeto es capaz de analizar y comprender cómo ocurren sus propios procesos y productos cognitivos. La adquisición de estrategias metacognitivas permite desarrollar la toma de conciencia y control de los procesos y productos cognitivos (Huertas, 2009).

Procesos afectivos emocionales

Están referidos a todos aquellos procesos motivacionales, el querer aprender; los sentimientos afectivos, placer por aprender; orientados a favorecer una predisposición emocional para optimizar la calidad del aprendizaje. El control de respuestas afectivo emocionales favorables hacia el aprendizaje, permite aumentar la conciencia del estudiante sobre su estado afectivo motivacional (Huertas, 2009).

2.3.2 Aprendizaje Colaborativo

Como primer paso para acercarnos a una conceptualización que sienta algunas bases para trabajar en torno al aprendizaje colaborativo, ya sea soportado tecnológicamente o no, acudamos a lo que nos dice Cabrera (2008), *“el aprendizaje colaborativo se define como aquella situación en la que un grupo de personas establece un compromiso mutuo para desarrollar una*

tarea y en la que, sólo la coordinación y relación de sus intercambios les permite alcanzar un logro común”.

En este sentido, la construcción de aprendizaje colaborativo surge como aquel conjunto de mediaciones pedagógicas, digitales o no digitales, a través de los cuales se pretende aunar los esfuerzos de un grupo determinado hacia el objetivo de que juntos puedan aprender; escenario en el que aparece la tecnología para la generación de nuevos espacios o entornos que conduzcan a la construcción del conocimiento y el aprendizaje (Johnson et al. 1999). Se refiere a grupos pequeños y heterogéneos trabajando juntos en una tarea en la cual, cada miembro es responsable individualmente de una parte de la actividad que no puede ser completada sino en un trabajo colectivo y en un estado de interdependencia (Cardozo-Cardone, 2010).

Lo anterior considera que para que el aprendizaje colaborativo se produce en un entorno conversacional como acto mediado por la palabra y el discurso, o sea, los participantes tienen que intentar establecer diálogos, negociaciones, explicaciones. Como base para que haya un intercambio debe haber experiencias previas compartidas, estrategias para obtener información, maneras de argumentar las ideas y propuestas, formas de evaluar las aportaciones de los demás, repetir y reformular lo que dicen los otros (Gros & Contreras, 2006).

Diseño, de tareas para el aprendizaje colaborativo

Las tareas diseñadas para los entornos colaborativo tienen el objetivo de conducir a la obtención de unas metas propuestas, por eso su diseño se convierte en la base fundamental para la construcción colaborativa de conocimiento. Al respecto Gulikers et al. (2004) considera que existen tres dimensiones sobre las cuales debe desarrollarse el diseño de tareas o las actividades (Gros, 2008):

- **La propiedad de la tarea:** Hace referencia a la pregunta sobre quién determina la tarea., la concreción que se da en el aula es la realmente importante a la hora de determinar la propiedad de la tarea que se basa en dos principios fundamentales:
 - a. ***La responsabilidad individual:*** Hace referencia a la preparación que desarrolla el estudiante en relación con su responsabilidad en la actividad que hay que realizar. Este aspecto es especialmente importante para la motivación del que aprende.
 - b. ***La interdependencia positiva:*** Consiste en suscitar la necesidad de que los miembros de un grupo tengan que trabajar juntos para realizar el trabajo encomendado. Para ello el docente propone una tarea clara y un objetivo grupal para que los alumnos sepan que se hundirán o saldrán a flote juntos. Pero hay que tomar decisiones sobre la responsabilidad de la ejecución de la tarea. El éxito de cada miembro del grupo está unido al resto del grupo, y viceversa. Se establece a través de objetivos de grupo (aprender y asegurarse de que los demás miembros del grupo también aprendan), reconocimiento grupal (el esfuerzo no es individual, sino de grupo), división de recursos (distribución de información y limitación de materiales) y roles complementarios.
- **El carácter de la tarea:** Tiene que ver con la pregunta sobre cómo se determina si una tarea es relevante o no para los estudiantes. La autenticidad de las tareas es uno de los puntos críticos frecuentemente mencionados en las investigaciones y también uno de los más difíciles. En este sentido, las opciones metodológicas adoptadas en las enseñanzas se centran en el uso del trabajo orientado a la realización de

proyectos, a la solución de casos, la solución de problemas para facilitar el acercamiento a problemas y situaciones auténticas.

- **El control de la tarea:** Hace referencia al tipo de interacción y participación del profesorado y de los estudiantes. Si bien es necesario planificar y dejar claro el lugar donde se sitúa el control mencionado, a menudo dependerá mucho del tipo de interacción que se dé entre los estudiantes, el nivel de la responsabilidad asumido, las capacidades comunicativas.

Diseño y desarrollo de sistemas de aprendizajes colaborativos

Kumar (1996) sintetiza sus aportaciones respecto al diseño y desarrollo de sistemas de aprendizajes colaborativos en los siguientes elementos (Cardozo-Cardone, 2010):

VER ANEXO 3.

2.3.3 Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

Esta teoría toma como una base en su estructura a Barrows (1986) quien define la teoría de ABP como *“un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”* (Morales & Landa, 2004).

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es un método de enseñanza aprendizaje centrado en el estudiante en el que éste adquiere conocimientos, habilidades y actitudes a través de situaciones de la vida real. Su finalidad es formar estudiantes capaces de analizar y enfrentarse a los problemas de la misma manera en que lo hará durante su vida cotidiana, es

decir, valorando e integrando el saber que los conducirá a la adquisición de conocimientos, habilidades y actitudes.

La metodología consiste en una colección de problemas del contexto, cuidadosamente contruidos por grupos de profesores de materias a fines que se presentan a pequeños grupos de estudiantes auxiliados por un tutor donde confluyen las diferentes áreas del conocimiento que se ponen en juego para dar solución al problema.

Básicamente hace referencia a enfrentar a los alumnos a una serie de dilemas sobre los que no disponen, de manera previa, de una abundante información, con lo que se le incita a la indagación. De esta manera, se posibilitan oportunidades para el desarrollo de habilidades específicas para el análisis, la comprensión y, en su caso, resolución del problema (Planas, 2007).

Métodos del ABP

Entre los métodos utilizados en el proceso de trabajo se siguen siete (7) pasos para la resolución del problema (Moust et al. 2007).

- 1. Aclarar conceptos y términos:** Se trata de aclarar posibles términos del texto del problema que resulten difíciles (técnicos) o vagos, de manera que todo el grupo comparta su significado.
- 2. Definir el problema:** Es un primer intento de identificar el problema que el texto plantea. Posteriormente, tras los pasos 3 y 4, podrá volverse sobre esta primera definición si se considera necesario.

- 3. Analizar el problema:** En esta fase, los estudiantes aportan todos los conocimientos que poseen sobre el problema tal como ha sido formulado, así como posibles conexiones que podrían ser plausibles. El énfasis en esta fase es más en la cantidad de ideas que en su veracidad (lluvia de ideas).
- 4. Realizar un resumen sistemático con varias explicaciones al análisis del paso anterior:** Una vez generado el mayor número de ideas sobre el problema, el grupo trata de sistematizarlas y organizarlas resaltando las relaciones que existen entre ellas.
- 5. Formular objetivos de aprendizaje:** En este momento, los estudiantes deciden qué aspectos del problema requieren ser indagados y comprendidos mejor, lo que constituirá los objetivos de aprendizaje que guiarán la siguiente fase.
- 6. Buscar información adicional fuera del grupo o estudio individual:** Con los objetivos de aprendizaje del grupo, los estudiantes buscan y estudian la información que les falta. Pueden distribuirse los objetivos de aprendizaje o bien trabajarlos todos, según se haya acordado con el tutor.
- 7. Síntesis de la información recogida y elaboración del informe sobre los conocimientos adquiridos:** La información aportada por los distintos miembros del grupo se discute, se contrasta y, finalmente, se extraen las conclusiones pertinentes para el problema.

Ventajas del ABP

El ABP ofrece algunas ventajas. VER ANEXO 2

2.4 CONCEPTOS BÁSICOS

2.4.1 Intervalos en la recta real

La invención del cálculo diferencial (de manera independiente y casi simultánea) por Newton y Leibniz a finales del siglo XVII supuso el acontecimiento más importante en el desarrollo de la matemática desde Euclides. Las influencias de esta invención en el progreso científico posterior, especialmente en lo referente a la física, pueden difícilmente sobrevalorarse: sin el cálculo diferencial no existiría la ciencia contemporánea (Durán & Guardeno, 1996). El desarrollo del Cálculo Diferencial en la historia de las matemáticas tuvo una formación lenta a través de la liberación de las percepciones sensoriales y la intuición primaria, lo mismo se puede decir para la introducción del Cálculo en los colegios (Wenzelburger, 1993).

La preocupación por mejorar el aprendizaje del cálculo en colegios o universidades, lleva a reflexionar sobre las metodologías empleadas para el proceso de enseñanza. Con frecuencia los alumnos construyen explicaciones inadecuadas e incluso erróneas desde el punto de vista matemático y descubren relaciones entre diferentes estructuras del saber matemático sin que ello haya sido parte explícita de la enseñanza (Engler et al. 1997).

Engler et al. (1997), mencionan que cuando se inicia la enseñanza del cálculo, los números reales y las funciones, son temas que los estudiantes desconocen del todo, y en numerosas investigaciones muestran, que para ellos, las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números que se encuentran en el curso de las extensiones sucesivas empíricas del cuadro numérico distan de ser claras. De igual manera, si hay asociación de los reales con la

recta numérica, esta asociación no corresponde necesariamente con la visión del continuo numérico.

2.4.2 La importancia de la Recta Numérica

Como se puede observar cobra mucha relevancia entender el papel de la recta numérica en los conocimientos previos de los estudiantes, la cual fue definida por Bouvier et al. (1984), en el conocido diccionario de matemáticas como *“un conjunto ordenado de los números reales R ”*. Sin embargo hay mucha discusión sobre la naturaleza de la recta numérica, ya que es tan antigua como la filosofía. Según Crossley (1987), fue Cantor quien primero mencionó que *“la identificación del sistema de números con puntos sobre la recta era una asunción que no podría ser demostrada”*.

También Dedekind (1998) dedujo que la continuidad de la recta es necesario expresarla con el siguiente axioma *“Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes”*. Diferentes matemáticos han desarrollado estructuras numéricas que, basándose en una elección axiomática adecuada, permiten, utilizarla como modelo de esas estructuras (Coriat & Scaglia, 2000).

El investigador francés Dehaene (2001) considera que un componente del sentido numérico es *“la habilidad para representar y manipular mentalmente numerosidades en una línea numérica”*. Este mismo autor supone que en esta línea numérica los números se representarían en un formato analógico como en una línea numérica mental, permitiendo un procesamiento eficaz y automático de las cantidades numéricas (Newcombe, 2002; Siegler & Booth, 2005).

Determinados avances importantes en matemáticas formales dependen de la comprensión de la relación entre los números y el espacio que ocupan en la recta numérica; la sucesión de los números sobre una recta numérica es fundamental para estas relaciones (de Hevia & Spelke, 2010; Gervasoni, 2005). Por tanto, la recta numérica sería una de las representaciones más importantes en el aprendizaje numérico y es considerada parte fundamental para el desarrollo del cálculo moderno (Suraña & Villagrán, 2017).

2.4.3 Conceptos básicos sobre intervalos

La recta numérica, es una representación unidimensional de una línea en la que los números enteros son mostrados como puntos marcados espaciados uniformemente, y el intervalo es un conjunto conexo de la recta real (Tomado de: https://www.ecured.cu/Recta_num%C3%A9rica).

El término intervalo procede del latín *inter-vallum* que quiere decir pausa o espacio. Se catalogan como un subconjunto de los números reales, los cuales pueden ser representados de forma gráfica en una recta numérica a través de una semirrecta o de un trazo. Un intervalo es una serie de números reales que están comprendidos entre dos conjuntos dados: el a y el b, los cuales se conocen como extremos del intervalo. Los intervalos son representados por medio de una circunferencia vacía o rellena en el extremo (Tomado de: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>).

2.4.4 Notación

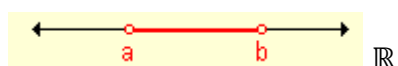
Existen dos notaciones principales: en un caso se utilizan corchetes y corchetes invertidos, en el otro corchete y paréntesis; ambas notaciones están descritas en el estándar internacional ISO 80000-2, Matemáticas.

2.4.4.1 Intervalo abierto

Se trata del intervalo donde sus extremos no forman parte del conjunto que está representando. En este intervalo se representan todos los números reales que son menores de b y mayores de a. En estos los valores se separan por una coma y entre paréntesis (Tomado de: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>).

No incluye los extremos.

- Notación de intervalo: (a,b) o bien]a,b[
- Representación gráfica:



Los extremos a y b se representan con círculos vacíos para dejar claro que no están incluidos en el intervalo.

- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:

$$I = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

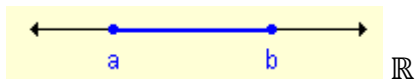
"I es un intervalo abierto entre a y b, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es mayor que a y menor que b".

2.4.4.2 Intervalo cerrado

A diferencia del anterior, en este tipo de intervalo sus extremos siempre forman parte del conjunto al cual representa. Este intervalo comprende dentro de su extremos a y b, todos los números reales que son iguales o mayores que a, y los iguales o menores que b. Los valores se representan entre corchetes y separados por una coma. (Tomado de: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>).

Si incluye los extremos.

- Notación de intervalo: $[a,b]$
- Representación gráfica:



Los extremos a y b se representan con puntos para dejar claro que están incluidos en el intervalo.

- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:

$$I = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

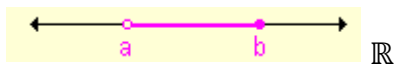
" I es un intervalo cerrado entre a y b , si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es mayor o igual que a y menor o igual que b ".

2.4.4.3 Intervalo semiabierto

Incluye únicamente uno de los extremos.

Los intervalos **semiabiertos por la izquierda** contienen dentro de sus segmentos números reales mayores que a e iguales o menores que b . Se representan con un paréntesis abierto y un corchete cerrado. (Tomado de: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>).

- Notación de intervalo: $(a,b]$ o bien $]a,b]$.
- Representación gráfica:



El extremo a se representa con un círculo vacío indicando que no se incluye y b se representan con un punto para dejar claro que está incluido en el intervalo.

- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:

$$I = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

"I es un intervalo semiabierto por la izquierda entre a y b, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es mayor que a y menor o igual que b".

Los intervalos **semiabiertos por la derecha** suelen comprender los números reales iguales o mayores que a y los que son menores que b. Se representa con la combinación de un corchete cerrado con un paréntesis abierto. (Tomado de: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>).

- Notación de intervalo: $[a,b)$ o bien $[a,b[$.
- Representación gráfica:



El extremo a se representa con un punto indicando que se incluye y b se representan con un círculo vacío para dejar claro que no está incluido en el intervalo.

- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:

$$I = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

"I es un intervalo semiabierto por la derecha entre a y b, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es mayor o igual que a y menor que b".

2.4.4.4 Intervalos con infinito

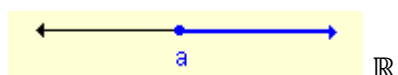
Este tipo de intervalos aparece cuando se conoce solo uno de los extremos y el otro es el infinito, es decir, un valor en términos absolutos mayor que cualquier otro, ya sea positivo o

negativo. Al no poderse incluir el infinito en el intervalo, estos se consideran siempre abiertos

(Tomado de: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>).

Intervalo donde se incluye el extremo y es infinito por la derecha.

- Notación de intervalo: $[a, \infty)$.
- Representación gráfica:



El extremo a se representa con un punto indicando que se incluye en el intervalo que va hasta el infinito por la derecha.

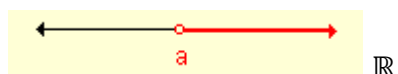
- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:

$$I = [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

" I es un intervalo infinito por la derecha, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es mayor o igual que a ".

Intervalo donde no se incluye el extremo y es infinito por la derecha.

- Notación de intervalo: (a, ∞) .
- Representación gráfica:



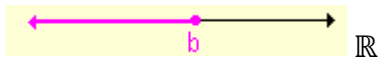
El extremo a se representa con un círculo vacío indicando que no se incluye en el intervalo que va hasta el infinito por la derecha.

- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:
- $I = (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

"I es un intervalo infinito por la derecha, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es mayor que a".

Intervalo que incluye el extremo y es infinito por la izquierda

- Notación de intervalo: $(-\infty, b]$.
- Representación gráfica:



El extremo b se representa con un punto indicando que se incluye en el intervalo que va hasta el infinito por la izquierda.

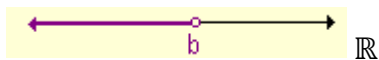
- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:

$$I = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$$

"I es un intervalo infinito por la izquierda, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es menor o igual que b".

Intervalo que no incluye el extremo y es infinito por la izquierda

- Notación de intervalo: $(-\infty, b)$.
- Representación gráfica:



El extremo b se representa con un círculo vacío indicando que no se incluye en el intervalo que va hasta el infinito por la izquierda.

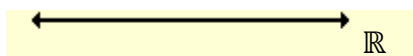
- Notación conjuntista o en términos de desigualdades:
- $I = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$

"I es un intervalo infinito por la izquierda, si se trata de los valores de x que pertenecen a los números reales, tales que, x es menor que b ".

Intervalo infinito para todo valor real

El intervalo $(-\infty, \infty)$ representa el conjunto de los números reales \mathbf{R} y corresponde a la recta real.

- Notación de intervalo: $(-\infty, \infty)$.
- Representación gráfica:



El intervalo incluye cualquier valor x comprendido en la recta real ($x \in \mathbf{R}$).

Es de aclarar que los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan números; son símbolos que nos recuerdan que el intervalo continua por siempre, aumenta o disminuye sin fin, por lo tanto siempre se escribe un paréntesis junto a ellos.

2.4.5 Consideraciones finales de la representación en la recta

- Aceptando el axioma de Cantor, la recta se identifica con el conjunto ordenado de los números reales (Crossley, 1987). Permite, en principio, representarlos todos, uno por uno, mediante puntos.
- La representación en la recta ayuda a intuir el orden continuo y total de \mathbf{R} .
- La representación de un número en la recta se apoya en un procedimiento de medida de longitudes mediante el cual es posible resaltar un punto y atribuirle una representación simbólica correspondiente a algún sistema de representación de números.

2.5 SABERES TECNOLÓGICOS Y PEDAGÓGICOS DEL CONTENIDO (TPACK)

(KOEHLER ET AL. 2015)

El marco TPACK se construye para explicar la comprensión que tienen los docentes sobre la tecnología educativa y la interacción de PCK (Conocimiento del Contenido Pedagógico) entre ellos para producir enseñanza efectiva con la tecnología. Los Saberes (TPACK) son una forma emergente de saberes que van más allá de los tres componentes nucleares (Contenido, pedagogía y tecnología); refiere a la comprensión que surge de la interacción entre los saberes de contenido, pedagogía y tecnología. Atrás de la enseñanza efectiva y significativa con la tecnología, TPACK es diferente de los saberes de estos tres conceptos individualmente.

En contraste, TPACK es la base de la enseñanza efectiva con la tecnología, requiere una comprensión de la representación de conceptos usando habilidades tecnológicas y pedagógicas que usan las tecnologías de manera constructiva para enseñar contenidos, saberes sobre qué hace que un concepto sea difícil o fácil para aprender y sobre cómo la tecnología puede ayudar a abordar algunos de los problemas que atraviesan los estudiantes, saberes entorno a los conocimientos previos de los alumnos, teorías de conocimiento, y saberes sobre cómo las tecnologías pueden ser usadas para construir un conocimiento existente para desarrollar nuevas epistemologías (Koehler et al. 2015).

El marco TPACK sugiere que la disciplina, la pedagogía, la tecnología y los contextos de enseñanza y aprendizaje tienen roles que ejercer individualmente y juntos. Enseñar de manera exitosa con tecnología requiere crear, mantener y re-establecer continuamente dinámicas de equilibrio entre todos los componentes. Vale la pena notar que un rango de factores ejercen influencia en cómo se alcanza este equilibrio (Koehler et al. 2015).

2.5.1 Los desafíos de enseñar con tecnología

La enseñanza de la tecnología se complica al considerar los desafíos que las nuevas tecnologías presentan a los docentes. En nuestro contexto, la palabra tecnología se aplica tanto para la tecnología analógica como digital, y para designar la nueva y la vieja tecnología. Tal como saben los educadores, la enseñanza es una práctica complicada que requiere entretrejer diferentes tipos de conocimiento especializado (Koehler et al. 2015). Algunos contextos sociales e institucionales no apoyan generalmente los esfuerzos de los docentes por integrar el uso de la tecnología en su trabajo. Los docentes a menudo tienen inapropiadas experiencias en el uso de tecnología digital para la enseñanza y el aprendizaje (Farrell, 2002).

Haciendo alusión de que enseñar con tecnología es una tarea compleja y débilmente estructurada, proponemos que la comprensión del enfoque para la integración exitosa de la tecnología requiere que los educadores desarrollen nuevas maneras de entender y acomodar esta complejidad. Las tres bases del conocimiento establecidas, contenido, pedagogía y tecnología, forman el núcleo del marco de trabajo (TPACK) (Koehler et al. 2015).

2.5.2 Conocimiento sobre el contenido

El conocimiento del contenido es de importancia crítica para los docentes. Tal como Shulman (1986) apuntó, este conocimiento incluye conceptos, teorías, ideas, marcos organizativos, evidencia y pruebas, así como prácticas y enfoques establecidos para desarrollar ese contenido.

2.5.3 Contenido Pedagógico

Contenido Pedagógico (PK) es el conocimiento profundo que tienen los docentes sobre los procesos y prácticas o métodos de enseñanza y aprendizaje. Ellos abarcan, entre otros factores, propósitos educativos generales, valores y metas (Duque et al. 2016).

2.5.4 Conocimiento Pedagógico del Contenido

El Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) es consistente y similar la idea elaborada por Shulman (1986, 1987) sobre conocimiento pedagógico aplicable a la enseñanza de contenido específico. Central a la conceptualización de PCK de Shulman se encuentra la noción de transformación del conocimiento disciplinar para su enseñanza. De acuerdo a Shulman (1986), esta transformación ocurre mientras la docente interpreta la disciplina, encuentra múltiples formas de representarla, y adapta y confecciona a medida los materiales de instrucción a las concepciones alternativas y a los conocimientos previos de los estudiantes.

2.5.5 Conocimiento sobre la Tecnología (TK) (Koehler et al. 2015)

El conocimiento sobre la tecnología (TK) está siempre en un estado de fluidez- más aún que los otros dos dominios de conocimientos en el marco TPACK (Pedagogía y contenido). Entonces, definirlo es notoriamente dificultoso. Los saberes de contenidos tecnológicos (TCK), entonces, comprenden el entendimiento de la manera en que la tecnología y el contenido se influyen y limitan mutuamente. Los docentes necesitan dominar mucho más que el contenido que enseñan; además tienen que tener una comprensión profunda de la manera en que los contenidos (o los tipos de representaciones que pueden ser contruidos) puede cambiar con la aplicación de una tecnología en particular. Para construir el TPK, es necesaria una comprensión

profunda de las limitaciones y posibilidades de las tecnologías y los contextos disciplinares con los que funcionan.

2.6 EL CUARTETO DEL CONOCIMIENTO (KQ)

Describe y analiza las observaciones hechas en el aula que revela el conocimiento del contenido matemático, esta categorizado en cuatro unidades o dimensiones: Foundation (Fundamentación); Transformation (Transformación); Connection (Conexión); y Contingency (Contingencia) (Rojas, 2013):

- Fundamento o conocimiento y comprensión de las Matemáticas *per se* (MKT);
- Transformación de los conocimientos del profesor para que los alumnos sean capaces de aprenderlos (ejemplos, representaciones, etc.);
- Conexión o conocimiento en acción manifestado en la coherencia y planificación de los contenidos a enseñar (HCK);
- Contingencia o conocimiento en interacción en el aula, pensar sobre la marcha.

Conceptualmente, las cuatro dimensiones del Cuarteto de Conocimiento se describen de la siguiente manera. La primera dimensión, la Fundamentación consiste en los conocimientos, creencias y comprensión adquirida en la formación de los profesores, para su rol en la sala de clases. El componente clave es el conocimiento y comprensión de las matemáticas *per se* sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, incluyendo las creencias sobre la naturaleza del conocimiento matemático, los propósitos de la educación matemática y las condiciones bajo las cuales los alumnos aprenden mejor matemáticas (Zamorano & Deulofeu, 2015).

2.6.1 Códigos claves (Torres & Deulofeu, 2015)

Conciencia de los objetivos, identificación de errores, conocimiento manifiesto de la materia, puntales teóricos de pedagogía, uso de terminología, utilización de libros de texto, dependencia de los procedimientos. En la segunda dimensión, la Transformación, es el conocimiento en la acción, es decir demostrado tanto en la planificación de lo que se va a enseñar como en el mismo acto de enseñar. Las descripciones y los significados propios del profesor se transforman y se presentan en método y manera que los alumnos sean capaces de aprenderlos. La presentación de ideas a los alumnos en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones (Torres & Deulofeu, 2015).

La tercera dimensión la Conexión, combina las elecciones y decisiones que se hacen en partes concretas del contenido matemático. Esta categoría se refiere a la coherencia de la planificación o de la enseñanza a lo largo de un curso o lección. Es lo que Ma (2010) denomina el conocimiento amplio y profundo de la materia. Además, incluye la coherencia de la instrucción en la secuenciación y además la conciencia de las demandas cognitivas relativas de los diferentes tópicos y sus tareas.

Son las conexiones entre diferentes significados y descripciones de conceptos particulares o entre modos alternativos de representar conceptos y de llevar a cabo los procedimientos; y por otro lado, la complejidad pertinente y la demanda cognitiva de conceptos y procedimientos matemáticos, por la atención de la secuenciación del contenido (Zamorano & Deulofeu, 2015).

La cuarta y última dimensión es la Contingencia, que se presenta en situaciones de la sala de clases que no han sido planificados previamente por el profesor o que se desvían de la planificación hecha por el profesor para la clase y que se presentan mientras éste enseña. También se entiende como la capacidad de asistir a los alumnos de manera improvisada a sus

preguntas, demandas o reacciones; se trata por tanto de conocimiento en interacción en el aula, manifestado en la habilidad del profesor para pensar sobre la marcha y responder a las intervenciones de los alumnos durante la clase. Las posibles actuaciones del profesor cuando se presenta una situación contingente van desde desviarse de lo que tenía programado cuando la contribución inesperada de un alumno pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho alumno y a la mayoría de la clase, o pueda implicar una vía de investigación productiva, hasta la no consideración de la intervención, pasando por diversos caminos intermedios (Rowland et al. 2009).

Rowland y Turner (2007), resumen de la siguiente manera el cuarteto de Conocimiento:

- Fundamentación o conocimiento: adherencia a las ideas de los libros de texto; conciencia del propósito; concentración en los procedimientos; identificación de los errores; conocimiento explícito del tema; base teórica; uso de terminología.
- Transformación: elección de ejemplos; elección de representaciones; demostración.
- Conexión: anticipación de complejidad; decisiones sobre la secuenciación; realización de conexiones; reconocimiento de la pertinencia conceptual.
- Contingencia: desviación de la agenda; respuesta a las ideas de los alumnos; uso de las oportunidades.

2.7 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE LEE S. SHULMAN

El CDC representa la intersección entre conocimiento de la materia *per se*, los principios generales de pedagogía y el contexto; sin embargo, no es únicamente una mera conjunción o integración (Gess-Newsome y Lederman, 1999) de elementos, sino una transformación del conocimiento del contenido a contenido enseñable, lo que implica, según Glatthorn (1990),

saber cómo adaptar el material representado a las características de los alumnos. Para Shulman (1986), el CDC "va más allá del conocimiento de la materia específica *per se* para la dimensión de conocimiento de la materia específica para la enseñanza", ya que si bien el conocimiento de la materia es necesario como uno de los componentes del conocimiento, hay que incorporar elementos adicionales (por ejemplo conocimiento curricular del contenido; repertorio de estrategias instruccionales; selección, diseño y uso diverso de materiales de apoyo; conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido), que marcan la diferencia de ser matemático a ser profesor de matemáticas.

2.7.1 Conocimiento del Contenido

Shulman (1986) define este primer nivel de conocimiento como la "cantidad y organización de conocimiento *per seen* la mente del profesor". Como elemento esencial y previo a su labor de enseñar, el profesor debe tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar: "el profesor necesita no sólo conocer o comprender qué, sino además saber también por qué esto es así, sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas" (Shulman, 1986).

2.7.2 Conocimiento de la Didáctica Específica

Shulman (1986 y 1987) y Barnett & Hodson (2001) afirman que los profesores no sólo tienen o deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido de manera efectiva, es decir, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades del estudiante. Para ello, se debe tener un conocimiento pedagógico (de métodos de

enseñanza y aprendizaje) adaptado al contexto específico de la materia, esto es, el conocimiento de la didáctica específica.

2.7.3 Conocimiento del Estudiante

El conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido que desea enseñar. Hawkins (Smith y Neale, 1989) define este dominio de conocimiento como la habilidad de hacer "penetrable" el contenido a los estudiantes. Consiste en la apremiante necesidad de que el profesor incorpore e integre a su bagaje de conocimientos los diferentes errores, preconcepciones y concepciones de los estudiantes y las condiciones instruccionales necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta (Shulman, 1986). Para Shulman y sus colaboradores, este conocimiento redundaría en una mejor comprensión sobre el tópico específico de que se trate, no sólo por parte de los estudiantes, sino también en relación con el nivel del CDC que tiene el profesor.

2.8 MODELO VAN HIELE

La Teoría de Niveles de Van Hiele, fue desarrollada por Pierre María Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof en disertaciones doctorales separadas en la Universidad de Utreht en Holanda en 1957. Este modelo se compone de tres elementos principales (López & Duarte, 2009):

- 1) Percepción “*insight*”, que se entiende como comprensión de las estructuras.
- 2) Estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles.
- 3) Fases de aprendizaje, que sirven de guía para diseñar la instrucción a la que se deben exponer los alumnos para ayudarlos a progresar del nivel en que se encuentren al siguiente.

En este modelo se observa una “jerarquización” ya que se trabaja sobre unos niveles, los cuales tienen un orden que no se puede alterar, y son “recursivos”, es decir que “lo que es implícito en un nivel se convierte en explícito en el siguiente nivel”. La progresión en y entre los niveles va muy unida a la mejora del lenguaje matemático necesario en el aprendizaje (Fouz & De Donosti, 2005).

Los niveles son cinco y se suelen nombrar con los números del 1 al 5, sin embargo, es más utilizada la notación del 0 al 4 (Fouz & De Donosti, 2005). Estos niveles se denominan de la siguiente manera:

NIVEL 0: Visualización o reconocimiento: en este nivel los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes. Se describen por su apariencia física asemejándoles a elementos familiares del entorno. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.

NIVEL 1: Análisis: se perciben los componentes y propiedades de los objetos y figuras, por medio de la observación y experimentación. Sin embargo no realizan clasificaciones de objetos y figuras a partir de sus propiedades.

NIVEL 2: Ordenación o clasificación: se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones. Por último, siguen las demostraciones pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura.

NIVEL 3: Deducción formal: en este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos, por lo que ya se entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas.

NIVEL 4: Rigor: se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías.

En la mayoría de trabajos realizados con estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles. Es importante señalar que, un estudiante puede estar, según el contenido trabajado, en un nivel u otro distinto. Hoy en día, al ser un modelo muy conocido y admitido por muchos docentes, existen múltiples aplicaciones dentro de las cuales se encuentran los trabajos realizados en geometría plana (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys et al. 1988), geometría de sólidos (Hoffer, 1981; Gutiérrez et al. 1991) y otros referidos al estudio de cuadriláteros y triángulos (Cowley, 1987).

López & Duarte (2009), realizaron un trabajo muy completo alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele, donde se hizo hincapié en la importancia de la red de relaciones que un alumno puede llegar a construir cuando se enfrenta a un concepto matemático y su estrecha relación con la idea de estructura en el modelo educativo de Van Hiele. Además, que la comprensión de la forma como funcionan las estructuras en el proceso de pensamiento permite el diseño de material didáctico que favorece en el alumno el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

2.9 AMBIENTES DE APRENDIZAJE

Para definir qué es un ambiente de aprendizaje, es necesario tener en cuenta las nociones de: entorno, ambiente y clima de aprendizaje, que a continuación brevemente se describen (Vité, 2012).

2.9.1 El entorno

Comprende todo lo que abarca el proceso educativo de enseñanza y aprendizaje; el espacio que rodea al estudiante que participa del proceso, conformado tanto por elementos materiales, infraestructura e instalaciones de la institución, como por aspectos que afectan directamente al estudiante, tales como factores físicos (sentirse cómodo en la planta física), afectivos (ser aceptado por sus compañeros), culturales, económicos, familiares, sociales, ambientales, etc. Los elementos mencionados se combinan y producen efectos tanto favorables como desfavorables en el aprendizaje de los alumnos (Vité, 2012).

2.9.2 El ambiente

Se refiere a los espacios en los cuales se llevan a cabo las actividades educativas, los cuales pueden comprender tres tipos: El auténtico, actividades de enseñanza y aprendizaje que se genera en el aula de clase; real, se da el proceso en escenarios que son reales donde se puede verificar la aplicación de conocimientos y competencias adquiridas, incluidas las actitudes y valores (estos escenarios pueden ser un laboratorio, biblioteca, áreas verdes, etc.); y virtual, aquellos que se diseñan a través del uso de las TIC, puede citarse la computadora, un aula virtual, el uso de internet, acceso a blogs, actividades divertidas como: rompecabezas, crucigramas (Vité, 2012).

2.9.3 El clima de aprendizaje

Consiste en la interacción, comunicación que se da en el proceso de enseñanza y aprendizaje entre los sujetos que participan en él (docente y estudiantes, viceversa y estudiantes con estudiantes). En éste debe preponderar la armonía, confianza, respeto, seguridad, para que los aprendices, puedan comunicar sus ideas e inquietudes con libertad; en este espacio también se incorporan las reglas que permitan un buen desarrollo del proceso educativo. En estas últimas juega un papel importante que el docente sea un modelo de conducta, la cual debe ser consecuente con las expectativas de los estudiantes. Por ejemplo si se establecen reglas que prohíben el abuso verbal o físico, ruidos que interrumpen el trabajo de los demás, entre otras, el docente debe también seguirlas (Vité, 2012).

La clase está constituida dentro de unas coordenadas espacio – temporales del curso académico (Rodríguez-López, 2015), por un grupo de personas (estudiantes y docente), entre los cuales se generan diferentes clases de relación, mediante vínculos de autoridad, confianza, afecto, cooperación, sumisión, rechazo, imposición, entre otras; transformándose en una relación recíproca y multidimensional que modifica el ambiente que se desarrolla diariamente. En tal sentido, se puede decir que el clima o convivencia que se establece en el aula, inciden en algún grado en el logro de los aprendizajes. Rodríguez-López (2015) afirma que: *“La variable que tiene mayor efecto positivo en el aprendizaje de los alumnos es el clima de aula”*.

Según Fernández (citado por Rodríguez-López, 2015), la relación entre profesores y alumnos y el clima que se da dentro del aula, no sólo intervienen en el rendimiento académico de los estudiantes, sino que además facilitan o dificultan el bienestar y desarrollo personal de todos los integrantes dentro de la clase; es decir, que existe una relación directa y positiva entre la eficacia de la enseñanza y un clima apto dentro del aula.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta una descripción general del diseño metodológico de investigación y de los instrumentos de recolección de datos orientadas a conseguir los objetivos planteados en este estudio, relacionados con la cuestión ¿Qué aportes didácticos ofrece el uso de las Ayudas Hipermediales Dinámicas en la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real con estudiantes de grado once de educación media? Igualmente en este capítulo se hace una descripción global de las distintas fases que constituyen el desarrollo de la investigación: diagnóstico, planificación - diseño, aplicación y evaluación.

3.1 DISEÑO CUALITATIVO DESCRIPTIVO

Se recurrió a la metodología cualitativa, de tipo descriptivo- interpretativo, que se refiere en su más amplio sentido a la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, la conducta observable; incluyó la observación participante, registros videográficos, grabaciones de audio, hojas de respuestas o cuadros de trabajo de los estudiantes, para posteriormente describir, analizar y vincular la información de acuerdo a los fenómenos que ocurren naturalmente en el de aula de clase, al usar el aplicativo (AHD).

Los resultados de las actividades propuestas a través del desarrollo de la secuencia didáctica y las observaciones se establecieron en categorías en lo referente a: uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase. Las categorías permitieron observar los actores que intervinieron en los entornos de aprendizaje y que incidieron directa o indirectamente en el proceso de enseñanza aplicado por el docente.

3.2 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se realizó en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de Circasia en el departamento del Quindío; institución con 1462 estudiantes, 50 docentes, y 4 directivos. Según datos del Proyecto Educativo Institucional, PEI (2014).

El colegio funciona en dos sedes y tres jornadas, modalidad académica y cubre el Preescolar, Básica Primaria (1° a 5°), Básica Secundaria (6° a 9°), Educación Media técnica (10° y 11°) y educación para adultos (ciclo 1, ciclo 2 y ciclo 3).

La unidad de análisis estuvo conformada por los estudiantes del grado 11°3, en el cual hay matriculados 18 estudiantes, que cumplieron con los siguientes criterios de selección:

- Estudiantes que cursan el grado once en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano.
- Jóvenes con edades entre los 16 y 18 años, con características socioculturales muy similares entre sí.
- Estudiantes que dieron su consentimiento informado por escrito, para participar en el proceso investigativo.
- Estudiantes que asistieron a la mayoría de las actividades planeadas en el desarrollo de la secuencia didáctica.

3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

3.3.1 Técnica de observación participante

Hay que distinguir entre lo que es “*observación*” y la “*observación participante*”. La primera es una técnica para la recolección de datos sobre comportamiento no verbal, mientras que la segunda hace referencia a algo más que una mera observación, es decir, implica la

intervención directa del observador, de forma que el investigador puede intervenir en la vida del grupo.

Goetz y LeCompte (1988) plantean que: *“la observación participante se refiere a una práctica que consiste en vivir entre la gente que uno estudia, llegar a conocerlos, a conocer su lenguaje y sus formas de vida a través de una intrusa y continuada interacción con ellos en la vida diaria”*.

En esta investigación el trabajo de aula fue desarrollado por el profesor investigador. Eso significa que tiene una participación directa en una serie de actividades durante el tiempo que dedica a observar a los sujetos participantes en el estudio y colaborar en sus actividades para facilitar una mejor comprensión; esto exigió preparación, diseño y organización previa a las secciones de trabajo de campo durante la experiencia.

3.3.2 Registro video-gráficos

El vídeo como instrumento de registro o apoyo visual en la investigación permitió obtener mayor información por la posibilidad de registrar imagen y sonido. De acuerdo con Gil (2011) *“El vídeo es en sí mismo una forma de indagar y recoger información, así como de construir y reconstruir realidades, no solo desde quien investiga sino también desde las personas o comunidades que narran su situación a través de las imágenes en movimiento”*.

Para este estudio los registros video-gráficos constituyen el principal instrumento de observación en el desarrollo de la investigación, con ellos se pretende documentar los ambientes de aprendizaje en el aula de clase, y evidenciar los procedimientos, situaciones, expresiones, comportamientos anímicos y expresivos de los estudiantes.

Se registran varias sesiones de grabación (filmación de clases) necesarias para la implementación de la secuencia didáctica, correspondiente al desarrollo temático de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, los que luego se analizan a la luz del marco teórico.

3.3.3 Los cuadros de trabajo

Cerda, (1991), describe los cuadros de texto como:

“Cualquier procedimiento gráfico que sirva para organizar, sintetizar o registrar los datos observados puede ser útil como, por ejemplo, planillas, cuadros de texto, columnas, etc. Estos cuadros pueden servir para registrar datos que provienen de los hechos que no proceden de la observación directa del investigador, actitudes y opiniones de las personas observadas o para registrar el funcionamiento o la situación de organizaciones, instituciones o grupos investigados”

Los cuadros de trabajo recogerán información adicional sobre el material, el trabajo de los estudiantes en el aula y la concepción que tienen ellos de su aprendizaje, ya sea de carácter autónomo o colaborativo. Cada cuadro registró la actividad relacionada con la temática o ruta de aprendizaje, los nombres, la fecha de entrega, las acciones que el estudiante o el grupo deberá tomar en relación a ella.

3.4 DISEÑO DEL MODELO PEDAGÓGICO PARA LA INTERPRETACIÓN DE LOS DIFERENTES TIPOS DE INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Es importante tener en cuenta que la priorización de las relaciones entre el enfoque pedagógico y las teorías de aprendizaje elegidas para el trabajo influyeron de forma trascendental en el diseño e implementación de la investigación, debido a que permitieron un acercamiento pertinente al contexto considerando las diferentes variables del mismo, para así poder elegir cuales de las características presentes en cada una de ellas lograba el mejor

acercamiento a los objetivos trazados según las condiciones dadas inicialmente. Allí se evidencio que el docente empleando un diseño tecno-pedagógico tenía la posibilidad de combinar características del enfoque pedagógico socioconstructivista con otras de las teorías de aprendizaje autónomo, colaborativo y basado en problemas para de esta forma abordar la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real haciendo uso de las TIC, dentro del entorno más apropiado; siempre con el fin de favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Según Ochoa (1994) *“Los modelos pedagógicos son construcciones mentales mediante las cuales se reglamenta y normativiza el proceso educativo, definiendo que se debe enseñar, a quienes, con que procedimientos, a qué horas”*.

Durante el desarrollo del trabajo se encontró que crear un modelo pedagógico para la enseñanza de la matemática exige competencias pedagógicas que permitan abordar distintas teorías de aprendizaje y aplicarlas en contexto, ya que se considera la educación como un fenómeno social, el cual está sujeto a un entorno sociocultural cambiante y en desarrollo. Vale la pena indicar que a la hora de establecer las relaciones entre estas teorías se visualizan alternativas de enseñanza y de aprendizaje de la matemática para abordar en diferentes contextos y estilos de aprendizaje. Por lo anterior fue necesario elaborar una matriz donde se muestra el enfoque pedagógico implementado y las teorías de aprendizaje utilizadas en la solución del problema educativo, los cuales representan los componentes que permitieron definir los diferentes eventos educativos que posibilitaron el diseño de un modelo pedagógico para la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real. Aquí se indica las prioridades de estas relaciones para enfrentar el problema diagnosticado relacionando las principales características del enfoque socioconstructivista con las características más relevantes de las teorías de aprendizaje, utilizando valores de 1 a 4 según su grado de afinidad.

MATRIZ DEL MODELO PEDAGÓGICO		ENFOQUE PEDAGÓGICO SOCIO-CONSTRUCTIVISTA					
TEORIA DE APRENDIZAJE		A	B	C	D	E	F
AA	K1	3	2	1	2	1	4
	K2	2	1	2	2	2	3
	K3	4	4	4	2	3	3
AC	K1	1	3	4	2	2	1
	K2	4	1	2	1	2	1
	K3	2	1	2	1	4	1
	K4	2	4	4	1	1	1
	K5	1	4	3	1	1	2
	K6	1	1	2	1	1	3
ABP	K1	3	2	3	2	2	2
	K2	2	4	3	1	1	2
	K3	2	1	2	4	4	4
	K4	1	2	2	1	1	4
L. SHULMAN	K1	3	3	3	2	3	4
	K2	3	3	3	2	2	2
	K3	4	2	3	1	1	3

Enfoque Pedagógico Socio-Constructivista

- A Saberes previos.
- B Ayuda ajustada.
- C Andamiaje (Mediación).
- D Niveles de desarrollo Representar – Comunicar.
- E Construcción compartida de significados y sentidos.
- F Delegación de responsabilidad y control.

Aprendizaje Autónomo (AA)

- K1 Auto regulación.
- K2 Autonomía creciente en uso de estrategias.
- K3 Elementos de aprendizaje

Aprendizaje Colaborativo (AC)

- K1 Control de interacciones colaborativas.
- K2 Dominio.
- K3 Tareas.
- K4 Entornos.
- K5 Roles
- K6 TIC.

Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

- K1 Problémica.
- K2 Investigación – Formativa.
- K3 Soluciónica.
- K4 Productiva.

Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC)

- K1 Conocimiento del contenido.
- K2 Conocimiento de la didáctica específica.
- K3 Conocimiento del estudiante (contexto).

3.5 PROCEDIMIENTO

La propuesta se desarrolló a través de las cinco fases que se describe en el siguiente cuadro resumen.

3.5.1 Fases, objetivos y actividades de estudio

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase I: Caracterización	Diagnosticar un problema de enseñanza del álgebra en el aula de clase.	Tomando como referencia los DBA (derechos básicos de aprendizaje) establecidos por el ministerio de educación nacional donde se hace mención a que el estudiante al cursar el grado once debe estar en condición de “Comprender que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales” (Gómez et al. 2016), los alumnos evidencian dificultades.
Fase II. Investigación	Identificar la incidencia de las AHD como estrategias didácticas para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real.	Se procede a elaborar un instrumento que nos permite diseñar, aplicar y evaluar los contenidos desarrollados en el aula. Para ello se empieza por: <ul style="list-style-type: none">• Elaborar una revisión bibliográfica sobre AHD, y el uso de las TIC aplicadas a la enseñanza de las matemáticas.• Elaborar una revisión bibliográfica sobre el Enfoque pedagógico socioconstructivista y las teorías de aprendizaje relacionadas.• Elaborar una revisión bibliográfica sobre didáctica en la enseñanza de los intervalos en la recta real.

Fase III: Diseño e Implementación.	<p>Crear una ayuda hipermedial dinámica para favorecer un acercamiento al estudio del concepto de intervalo en la recta real.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Construcción del Diseño Tecno Pedagógico para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real. • Selección, adecuación y construcción de recursos didácticos para el desarrollo las unidades temáticas • Diseño y construcción del instrumento AHD, para la enseñanza y el aprendizaje de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, utilizando la aplicación Cmaptools.
Fase IV: Aplicación	<p>Aplicar la herramienta didáctica AHD, desarrollada, en el grado 11°3 de la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación de la secuencia didáctica con uso de la AHD en 4 secciones de clase de 90 minutos en el grado 11°3 de la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano. • Organización de evidencias de los estudiantes en el trabajo autónomo y colaborativo en las actividades propuestas en el instrumento pedagógico.
Fase V: Análisis y Evaluación	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluar el desempeño de la herramienta didáctica con los estudiantes en 4 aspectos preestablecidos: • Creación de material educativo. • Uso de recursos educativos. • Estrategias Comunicativas en el aula de clase. • Adaptación de recursos educativos al contexto. • Estrategias comunicativas. Todas ellas planteada a la luz del enfoque pedagógico socioconstructivista y las teorías de aprendizaje autónomo, colaborativo y basado en problemas con los estudiantes del grado 11°3 en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano. 	<ul style="list-style-type: none"> • Determinar la Incidencia de los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas al profesor de matemáticas, desde el enfoque socioconstructivista para enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real. • Uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase con estudiantes del grado 11°3 en la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano. • Evaluar el desempeño alcanzado durante la implementación de la estrategia didáctica desde el aspecto curricular.

Tabla 1. Fases, objetivos y actividades.

3.6 DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA AHD

La aplicación (AHD) tiene como propósito construir conocimiento sobre el concepto de intervalo en la recta real, de manera autónoma y colaborativa, por medio de recursos multimedia; además dinamizar la clase mediante la implementación de las TIC en el aula facilitando la comunicación entre los estudiantes y el docente.

A groso modo el instrumento se compone de las siguientes partes:

- **Generalidades.** Comprende los botones de la parte superior izquierda de la AHD. (Presentación, contenido, roles, Instrucciones y normas).
- **Prueba diagnóstica inicial para los estudiantes:** Determina el estado inicial del estudiante, es decir, valora los conocimientos previos, para determinar las posibilidades de ajustar rutas y actividades a la situación particular de cada estudiante.
- **Desarrollo temático de la unidad didáctica.** Consta de 4 secciones de contenidos (planeadas en la SD) para el alcance de los objetivos propuestos.
- **Sistema de evaluación.** En general en todo el desarrollo de la AHD, el sistema indaga a los estudiantes sobre preferencias y sus avances del aprendizaje por sí mismo, es un sistema de autoevaluación permanente que informa sobre los progresos obtenidos.

3.6.1 Diseño de la Secuencia Didáctica (SD)

La SD está compuesta de una sección exploratoria de introducción a temas como la recta numérica y los signos de desigualdad organizada en cuatro secciones para las clases planeadas

durante el desarrollo temático de la unidad didáctica, para el aprendizaje de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, las cuales relacionamos a continuación:

1ª sección. Pre-conceptualización.

2º sección. Conceptos elementales.

3ª sección. Conceptos básicos.

4ª sección. Conceptos avanzados.

Cada sección está planeada para realizarse en una hora y media aproximadamente y se aplican en 4 sesiones de clase con el tiempo mencionado, las cuales se filmaran y posteriormente se realizara el análisis de las situaciones didácticas observables a través de los registros video gráficos, contemplando el actuar del docente, bajo la luz del marco teórico. Los aspectos tenidos en cuenta para el diseño de la SD, se basan en estudios de Tobón et al. (2010).

3.7 DISEÑO Y ORGANIZACIÓN DEL AMBIENTE DE APRENDIZAJE

El ambiente de aprendizaje en el que se desarrolla esta propuesta pedagógica se encuentra en el entorno de la Institución Educativa Luis Eduardo Calvo Cano, un espacio en el que los estudiantes interactúan de forma presencial con el docente, en un ambiente donde la construcción cognitiva se realiza por medio de un trabajo colaborativo mediado por TIC, donde cobran sentido las estrategias didácticas que use el docente para cumplir los objetivos de la clase.

3.7.1 Contexto Físico

En el desarrollo de la propuesta de investigación se contó con dos modem wifi llevados por el docente, brindaran cobertura a todo el salón de clase en unos 30 metros cuadrados ya que no fue posible hacer uso de la sala de sistemas de la institución.

Se trasladaron al aula seis computadores portátiles fuera del utilizado por el docente, con los cuales los estudiantes realizaron las diferentes actividades propuestas de forma colaborativa, a pesar de las evidentes limitaciones en cuanto a herramientas de trabajo.

La buena disposición de los estudiantes para llevar a cabo el trabajo contrarresto los inconvenientes que se presentaron, ya que fue un poco complicado adaptar el aula convencional del grado 11°3, para desarrollar cuatro sesiones de clase haciendo uso de la Ayuda Hipermedial Dinámica (AHD), apoyados en las TIC.

3.7.2 Rol del estudiante

En el trabajo de investigación se recalca la participación activa y directa que tienen los estudiantes en la propuesta; el cambio radica en que los alumnos pasan de ser simples receptores de contenidos a convertirse en multiplicadores de los mismos, por lo tanto se transforman sin darse cuenta en actores principales del proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.7.3 Rol del docente

En esta propuesta se parte de un enfoque pedagógico que se considera pertinente para re-conceptualizar el rol del docente, considerando que el socio-constructivismo abandona el concepto de profesor asociado a métodos de enseñanza tradicionales y anticuados, en favor de una renovada imagen como profesional que tiene un rol más activo en el diseño de situaciones específicas de enseñanza, por tanto el profesor debe ser conocedor de las necesidades

contemporáneas que manifieste el estudiante en cuanto a su formación académica y de los estímulos que reciba en los contextos donde se desenvuelve: familiares, educativos, sociales, para que en base a estas condiciones se logre realizar ajustes en esta caso a la AHD.

El docente actúa bajo el principio constructivista desplazando el énfasis de enseñanza hacia el aprendizaje, procurando que el alumno construya los conceptos, descubra los hechos y se apropie de los datos por sí mismo.

3.8 EVALUACIÓN DE LA AHD

La AHD producto de este ejercicio contó con diversos escenarios de evaluación, co-evaluación y autoevaluación:

- El primero de ellos a través de cuatro preguntas al iniciar la primera sesión, que permitió conocer sus saberes previos.
- El segundo dio cuenta de los avances del aprendizaje por sí mismo o autoevaluación que permanentemente informó sobre los progresos obtenidos y se encontró a lo largo de todo el desarrollo de contenidos.
- El tercero estuvo relacionado con la valoración que hizo el estudiante de la funcionalidad y la pertinencia de cada uno de los componentes de la AHD para el proceso de aprendizaje. Al final de cada sección (recomendaciones).
- El cuarto fue el que hizo el docente a la hora de desarrollar la clase, acerca de las oportunidades didácticas y de sus aprendizajes, tanto comunicativos, metodológicos, didácticos, epistemológicos, como conceptuales del estudio de los intervalos en la recta real, mediante la implementación de las TIC en el aula.

CAPITULO 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Tomando como referencia la pregunta formulada en la investigación sobre qué aportes didácticos ofrece el uso de ayudas hipermediales dinámicas en la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, en lo referente a creación, uso de la AHD, estrategias comunicativas y adaptación de recursos educativos al contexto en el aula de clase, se llega al siguiente análisis e interpretación de la información obtenida en el proceso de observación durante el desarrollo de las diferentes sesiones de trabajo.

VER ANEXO 1.

4.1 CLASIFICACIÓN DE LAS INTERPRETACIONES

OBJETIVO 1	OBJETIVO 2	OBJETIVO 3	OBJETIVO GENERAL
Diseñar un modelo pedagógico para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real en el aula de clase.	Crear una ayuda hipermedial dinámica para apoyar el proceso de enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real.	Crear una unidad didáctica con uso de la AHD para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real y aplicarlo en clase para valorar sus aportes didácticos.	Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas desde el enfoque socioconstructivista en la enseñanza del concepto de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real con estudiantes de grado 11° de la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de Circasia Quindío, en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias comunicativas en el aula de clase.
I4, I5, I6, I7, I9, I10, I11, I12, I15, I17, I18, I19, I20, I21, I22, I24, I25, I26, I28, I31, I33, I35, I37, I38, I40, I42, I45, I46, I51, I56, I57, I58, I59, I60, I61, I62, I63, I64, I65, I66, I67.	I1, I2, I3, I4, I5, I7, I8, I10, I13, I14, I15, I16, I17, I18, I19, I20, I21, I22, I23, I24, I27, I29, I30, I31, I34, I35, I36, I38, I39, I40, I41, I42, I43, I44, I46, I48, I49, I50, I52, I53, I54, I55, I56, I59, I62, I63, I65, I66, I67.	I1, I2, I3, I4, I7, I8, I9, I10, I11, I12, I14, I16, I23, I25, I26, I27, I28, I29, I30, I31, I32, I33, I34, I36, I39, I41, I43, I44, I45, I47, I48, I49, I50, I52, I53, I54, I55, I57, I58, I59, I60, I61, I63, I64.	
CONCLUSIÓN 1	CONCLUSIÓN 2	CONCLUSIÓN 3	CONCLUSIÓN GENERAL

Tabla 2. Clasificación de las interpretaciones.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

5.1 CONCLUSIÓN 1

El diseño de un modelo pedagógico que facilite el estudio de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, con los estudiantes de grado 11° de la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de circasia Quindío, evidencio que el docente apoyado en un diseño tecno-pedagógico puede relacionar el enfoque pedagógico socioconstructivista con las teorías de aprendizaje autónomo, colaborativo y basado en problemas para de esta forma poner dentro del contexto más apropiado el tema a desarrollar en clase favoreciendo el aprendizaje del estudiante. Todo lo anterior se complementa con la teoría TPACK (Koehler et al. 2015) donde se aprovechan las ventajas ofrecidas por la enseñanza efectiva con tecnología, resultando su aplicación como herramienta pedagógica en un acierto por su versatilidad y su cualidad de innovadora, de esta forma todos los componentes empleados para el trabajo de investigación con la AHD resultaron favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje y sin duda hubo aciertos que son evidentes para el docente entre los cuales se encuentran el que los estudiantes manifestaran que fue una experiencia agradable e innovadora el estudio del concepto de intervalo en la recta real empleando la AHD, el uso de las TIC en el aula, la autonomía en el trabajo, el desarrollar las actividades en equipo, el sentirse con una mayor participación en el proceso de enseñanza aprendizaje; superando de esta manera dificultades presentes a diario como la falta de interés por parte de los alumnos debido a la rutina de la clase magistral o convencional. Los resultados obtenidos demuestran que si es posible la elaboración de un modelo pedagógico para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos en la recta real, con una cantidad considerable de resultados positivos en cuanto a interés por el trabajo propuesto, motivación en el desarrollo de las actividades, colaboración con sus compañeros, responsabilidad con su rol, organización de la clase y comportamiento disciplinario, por parte

de los estudiantes. Dentro del contexto institucional y particularmente de la clase se encontró que en determinado momento se puede presentar que lo planeado en las actividades pedagógicas no se logra aplicar como se esperaba, en este punto una de las mayores dificultades se puede dar respecto al tiempo que en algunas sesiones no es acorde a lo que se ha planificado inicialmente, también es necesario verificar y comprobar los recursos que ofrece la institución, ya que aparecen dificultades como el no contar con equipos suficientes, no tener una conexión a internet, tener que adecuar el aula para el trabajo y la logística de la filmación, lo cual demanda tiempo que no está previsto, quedando demostrado la importancia que tiene el contexto social en el diseño pertinente de un modelo pedagógico que conduzca al aprendizaje de los estudiantes.

5.2 CONCLUSIÓN 2

Crear una Ayuda Hipermedial Dinamica (AHD), para apoyar el proceso de enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, con los estudiantes de grado 11° de la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de circasia Quindío, demostró que a partir de las experiencias del docente trabajando el tema se deben tener en cuenta las dificultades pre-conceptuales más puntuales de los estudiantes, es allí donde el profesor pudo representar lo que sabe apoyado en una herramienta pedagógica, demostrando su conocimiento del contenido y tratando de transformarlo en contenido enseñable, ya que, si bien el conocimiento de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real es necesario como uno de los componentes del conocimiento, hay que incorporar elementos adicionales como enseñar empleando la tecnología (TIC), aprovechar el conocimiento que tiene el profesor sobre el contenido, implementar herramientas pedagógicas (AHD), para que se marque la diferencia de ser matemático a ser profesor de matemáticas. La implementación de una herramienta didáctica por parte del profesor demuestra que este se preocupa por cual es la

mejor manera de transmitir sus conocimientos a los estudiantes, ofreciendo un interés particular por la didáctica específica que conduce el proceso a ser exitoso, por esta razón, Shulman (1986 y 1987) y Barnett y Hodson (2001) afirman que los profesores no sólo tienen o deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido de manera efectiva, es decir, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades del estudiante. De esta forma queda sustentado que si es posible la creación de una ayuda hipermedial dinámica para trabajar el concepto de interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, la cual se puede ir mejorando con base en las experiencias para que facilite el conseguir los objetivos trazados en la secuencia didáctica; además permite al docente adquirir un conocimiento tecnológico adicional al que ya tenía, considerando que la enseñanza efectiva con la tecnología requiere una comprensión de la representación del concepto de intervalo en la recta real, usando habilidades tecnológicas y pedagógicas empleadas por las tecnologías de manera constructiva para enseñar apoyados en una AHD y tratar de identificar qué hace que un concepto sea difícil o fácil para aprender en lo referente al tema y sobre cómo la tecnología puede ayudar a abordar algunos de los problemas que atraviesan los alumnos en cuanto a la comprensión de algunos conceptos.

5.3 CONCLUSIÓN 3

Crear una unidad didáctica con uso de la AHD para la enseñanza de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real, permitió que el docente implementara nuevas alternativas en el aula como el uso de las TIC en busca de ofrecer la coherencia necesaria en el desarrollo del tema de la clase y así poder contar con una planeación adecuada de la misma, lo cual sin duda se consiguió en la medida de lo posible. La unidad didáctica creada para este

trabajo condujo a organizar los contenidos en la AHD de tal forma que se desarrollaran de manera secuencial considerando el grado de dificultad de los mismos, se debía saber en cual momento era precisa una instrucción para que permanentemente el estudiante lograra construir su propio conocimiento, se promovió que todos los alumnos, independiente del rol que se les asigno al inicio del trabajo, tuvieran una participación destacada no solo dentro de su equipo sino para toda la clase, se le permitió al estudiante incorporar algunas cosas que sean de su agrado o le llamen la atención como se hizo en la actividad llamada el grupo de whatsapp, fue muy importante procurar por contar con un ambiente de aprendizaje optimo donde fueron claras las normas de convivencia, se oriento el proceso de forma que los estudiantes contaran con distintas posibilidades de refuerzo o ampliación, así mismo fue fundamental resaltar y elogiar el buen desempeño que tuvieron en determinado momento los estudiantes , lo mencionado anteriormente pueden ser todos ellos ejemplos de ayuda educativa y forman parte, de la tarea de enseñar (Onrubia et al. 1999). Por esta razón resulto sumamente importante la creación de una unidad didáctica con uso de la AHD para la interpretación de los diferentes tipos de intervalos, debido a todas las ventajas que ofreció, dentro de ellas su característica de innovadora lo que la hizo llamativa para los estudiantes y los condujo de esta manera a tener una motivación extra al momento de aprender lo relacionado con el tema de estudio

5.4 CONCLUSIÓN GENERAL

Determinar los aportes didácticos que ofrece el uso de Ayudas Hipermediales Dinámicas desde el enfoque socio-constructivista en la enseñanza del concepto de la interpretación de los diferentes tipos de intervalos en la recta real con estudiantes de grado 11° de la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de Circasia Quindío, en lo referente al uso y creación de material educativo, adaptación de recursos educativos al contexto y estrategias

comunicativas en el aula de clase, permitió que el docente explorara otras formas de hacer la clase adquiriendo competencias pedagógicas que le facilitaron transmitir su conocimiento sobre el concepto de intervalos en la recta real a los estudiantes, empleando la AHD como elemento mediador del aprendizaje.

De esta forma y por todas las experiencias adquiridas durante el trabajo es evidente que los aportes didácticos que ofreció la herramienta son notables, se pudo ver la motivación demostrada por los estudiantes en la actividad, el interés que se demostró por el trabajo propuesto, el compromiso en el momento del desarrollo de las actividades, la colaboración con sus compañeros (siendo muy solidarios en el momento que era necesario), la responsabilidad con su rol dentro del equipo (demostrando preocupación por hacer muy bien lo que le correspondía), la participación en la organización de la clase, el comportamiento disciplinario adecuado (para fomentar un ambiente de aprendizaje con las condiciones más favorables) y el interés por explorar lo que la AHD podía ofrecer cuando se iniciaron las actividades. El trabajo permitió tener en cuenta diferentes aspectos que el maestro debe considerar con detenimiento y que la creación del modelo pedagógico trato de considerar siempre, como las necesidades particulares de los estudiantes, sus diferencias conceptuales, ritmos de aprendizaje, su inclusión, contexto y capacidades excepcionales. Los resultados luego del trabajo de investigación son positivos, ya que se consiguió dentro de lo posible, crear situaciones y objetos de aprendizaje que sirven como herramienta de comunicación en un trabajo autónomo y colaborativo donde es posible hallar una relación entre lineamientos, estándares en competencias matemáticas y logros apoyados en la tecnología, a partir de una situación problema que se aparecía en forma recurrente como es la dificultad notable para interpretar los diferentes tipos de intervalos en la recta real por parte de los estudiantes de grado once en la institución educativa Luis Eduardo Calvo Cano del municipio de Circasia Quindío.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amador, J. F., & Grupo de Investigación Creando con Redes de Información y Educación CRIE. (2013). *Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en los proyectos de aula con TIC, otra forma de enseñar y aprender conjuntamente: Computadores para educar-Universidad Tecnológica de Pereira estrategia de formación y acceso para la apropiación pedagógica de las TIC 2012-2014*. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Acosta Luévano, R. M. (2015). Las tecnologías de la información y del conocimiento (Tic), como mediadores digitales desde la psicología de la educación virtual.
- Amador, J.F., García, J.L.R. & Bedoya, H.G.S. (2015). *La indagación progresiva (IP) con Ayudas Hipermediales Dinámicas (AHD) en el currículo escolar del Archipiélago de San Andrés, Providencia y Santa Catalina*. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia.
- Bouvier, A., George, M., & Le Lionnais, F. (1984). *Diccionario de matemáticas* (No. 03) 51 BOU).
- Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. *Medical education*, 20(6), 481-486.
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 31-48.
- Barnett, J., & Hodson, D. (2001). Pedagogical context knowledge: Toward a fuller understanding of what good science teachers know. *Science Education*, 85(4), 426-453.
- Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-39.
- Crossley, J. N. (1987). *The emergence of number*. World Scientific.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, 1-16.
- Cerda, H. (1991). El Plan Operativo de una Investigación: Los Elementos de la Investigación. *Capítulo VI. Bogotá: El Buho. Compilación con fines Instruccionales*.
- Chevallard, Y. (1991) La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Cole, M., & Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations*, 1-46.
- Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Mariana Miras, J. O., & Zabala., I. S. (1993). El Constructivismo en el aula. Barcelona, España.
- Coriat, M., & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 18(1), 25-34.
- Cabrera, E. (2008). *La colaboración en el aula: Más que uno más uno*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Coll, C., Onrubia, J., & Mauri, T. (2008). Ayudar a aprender en contextos educativos: el ejercicio de la influencia educativa y el análisis de la enseñanza Supporting Learning in Educational Contexts: the Exercise of Educational Influence and the Analysis of Teaching. *Revista de educación*, 346, 33-70.
- Cardozo-Cardone, J. J. (2010). Los aprendizajes colaborativos como estrategia para los procesos de construcción de conocimiento. *Educación y Desarrollo Social*, 4(2), 87-103.
- Cárdenas Rodríguez, W. (2017). *Estrategias didácticas de aprendizaje en matemáticas* (Bachelor's thesis, Universidad Militar Nueva Granada).
- Castaño, L. C. (2017). Los derechos básicos de aprendizaje y la Narrativa Transmedia, otra forma de aprender en clase de matemáticas. *Educación y ciudad*, (33), 87-98.
- Durán, A. J., & Guardeno, A. J. D. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo* (Vol. 861). Alianza Editorial.
- Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Trad. de Ferreirós, J. Madrid: Alianza Editorial.
- Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language*, 16(1), 16-36.
- Díaz B.F. & Hernández R., G. (2002). Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Segunda edición. Santa Fe de Bogotá: McGraw Hill.
- Díaz, M., Valencia, G., Muñoz, J., Vivas, D., & Urrea, C. (2006). Educación superior: horizontes y valoraciones, relación PEI-ECAES. *Cali: Universidad de San Buenaventura, Facultad de Psicología Centro de Investigaciones Bonaventuriano e Instituto del Fomento de la Calidad de la Educación Superior, Icfes*.
- De Hevia, M. D., & Spelke, E. S. (2010). Number-space mapping in human infants. *Psychological Science*, 21(5), 653-660.
- Duque, P. A., Vallejo, S. L., & Rodriguez, J. C. (2016). *Prácticas Pedagógicas y su relación con el desempeño académico* (Tesis de Maestría). Universidad de Manizales.

- Engler, A., Aquere, S., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. I. (2007). Nos preparamos para el cálculo trabajando sobre la recta real. *Revista Premisa*, 9(32), 24-36.
- EcuRed. Conocimiento con todos y para todos. (2018). La Recta Numérica, Ecuador. Recuperado Marzo 28, 2018, desde: https://www.ecured.cu/Recta_num%C3%A9rica
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 3, i-196.
- Farell Vázquez, G. E. (2002). El desafío de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones para los docentes de la Educación Médica. *Educación Médica Superior*, 16(1), 5-6.
- Fouz, F., & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. *Módulo 2: Teoría y Práctica en Geometría Objetivo N 3 Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría* 91, 92.
- Fernández, J. M. M., & Cervantes, C. T. (2016). Mensajería instantánea y construcción compartida de significados: una experiencia de aprendizaje colaborativo en el Prácticum de Maestro de Educación Primaria. *Revista de Educación a Distancia*, (51).
- Goetz, J.P.Y Lecompte, M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Ed Morata.
- Glatthorn, A. A. (1990). *Supervisory leadership: Introduction to instructional supervision*. Glenview, IL: Scott, Foresman/Little, Brown Higher Education.
- Gudmundsdottir, S. (1990). Nancy: pedagogical content knowledge of an expert teacher. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston*.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics education*, 237-251.
- Gess-Newsome, J. and Lederman, N. G. (1999). Reconceptualizing secondary science teacher education. In *Examining pedagogical content knowledge* (pp. 199-213). Springer, Dordrecht.
- Gulikers, J. T., Bastiaens, T. J., & Kirschner, P. A. (2004). A five-dimensional framework for authentic assessment. *Educational technology research and development*, 52(3), 67.
- Garrido, M. F. (2005). *Formación basada en las tecnologías de la información y comunicación: Análisis didáctico del proceso de enseñanza-aprendizaje* (Doctoral dissertation, Universitat Rovira i Virgili).
- Gervasoni, A. (2005). Opening Doors to Successful Learning for Those Who Are Vulnerable.” In Judy Mousley, Leicha Bragg, & Coral Campbell (Eds). *Mathematics: Celebrating Achievement: Proceedings of the 42nd Annual Conference of the Mathematics Association of Victoria (MAV)*, (pp. 125–36). Brunswick, Victoria: MAV.
- Gros Salvat, B., & Contreras, D. (2006). La alfabetización digital y el desarrollo de competencias ciudadanas. *Revista Iberoamericana de Educación (OEI)* 42: 103-125.
- Gros Salvat, B. (2008). Aprendizajes, conexiones y artefactos. *La producción colaborativa del aprendizaje*. Barcelona: Editorial Gedisa
- Gil, M. E. G. (2011). El vídeo como herramienta de investigación: Una propuesta metodológica para la formación de profesionales en Comunicación. *Revista del CES Felipe II*, 13(7).
- Gonçalves Diez, S. (2011). La Reflexión sobre el proceso de aprendizaje propio: estrategias para favorecerla. Universitat de Girona.
- Gutiérrez-Giraldo, M. C., & López-Isaza, G. A. (2011). La interactividad en la construcción del conocimiento escolar. *Innovar*, 21(41), 5-18.
- Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F., & Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. *Educación y Educadores*, 19(3), 315-338.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics teacher*, 74(1), 11-18.
- Hashweh*, M. Z. (2005). Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching*, 11(3), 273-292.
- Huertas, R. M. (2009). Formación de la autonomía a través del aprendizaje estratégico. *Revista Aporte Santiaguino*, 2(2), 321-331.
- Hlas, A., & Hildebrandt, S. (2010). Demonstrations of pedagogical content knowledge: Spanish liberal arts and Spanish education majors' writing. *L2 Journal*, 2(1).
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1999). El aprendizaje cooperativo en el aula. Editorial Paidós. Buenos Aires, Argentina.
- Jiménez, M. (2000). Competencia social: intervención preventiva en la escuela. *Infancia y Sociedad*. 24, pp. 21 - 48.
- Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2015). ¿Qué son los saberes tecnológicos y pedagógicos del contenido (TPACK)? *Virtualidad, educación y ciencia*, 6(10), 9-23.

- Kumar, V. S. (1996). Computer-supported collaborative learning: issues for research. In *Eighth annual graduate symposium on Computer Science, University of Saskatchewan*.
- Lage, F. J. (2001). *Ambiente distribuido aplicado a la formación/capacitación de RR HH: un modelo de aprendizaje cooperativo-colaborativo* (Doctoral dissertation, Facultad de Informática).
- López, C. M. J., & Duarte, P. V. E. (2009). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y pedagogía*, 18(45), 109-118.
- Lemos, J. J. (2012). *El modelo de Van Hiele en una estrategia para el desarrollo del pensamiento espacial por medio del esquema corporal* (Doctoral dissertation, Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ciencias de la Educación. Licenciatura en Pedagogía Infantil).
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of teacher education*, 41(3), 3-11.
- Mercer, N. (2001). Spoken language in the classroom. En Mesthrie, Rajend ed. *The Concise encyclopedia of sociolinguistics*. Encyclopedia of Language and Linguistics. Amsterdam, Netherlands: Pergamon, 749-752.
- Morales, P., & Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*, 13(1).
- Monereo, C. (2007). Hacia un nuevo paradigma del aprendizaje estratégico: el papel de la mediación social, del self y de las emociones. *electronic Journal of research in educational Psychology*, 5(13).
- Moust, J. H., Bouhuijs, P. A., & Schmidt, H. G. (2007). *El aprendizaje basado en problemas: guía del estudiante* (Vol. 1). Univ de Castilla La Mancha.
- Ma, L. (2010). Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE. UU. *Santiago: Academia Chilena de Ciencias*.
- Mercado Maldonado, R., & Montaña Sánchez, L. (2015). Procesos de participación entre profesoras de jardines de niños y madres de familia en actividades de enseñanza. *Revista mexicana de investigación educativa*, 20(65), 347-368.
- Newcombe, N. S. (2002). The nativist-empiricist controversy in the context of recent research on spatial and quantitative development. *Psychological Science*, 13(5), 395-401.
- Ochoa, R. F. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill.p. 60.
- Onrubia, J. (1995). El proyecto adolescente: elementos para una aproximación constructivista, interaccionista y contextual al desarrollo psicológico en la adolescencia. *Aula de Innovación Educativa*, 4(40-41), 85-90.
- Organización de Estados Iberoamericanos (1996). Evaluación de la calidad de la educación. *Revista Iberoamericana de Educación*, (10), 215-230.
- Onrubia, J., Solé, I., & Zabala, A. (1999). El constructivismo en el aula. *Barcelona: Graó*.
- Planas, L. A. (2007). *El desarrollo de competencias docentes en la formación del profesorado*. Ministerio de Educación.
- Robinet, J. (1986). Les réels: Quels modèles en ont les élèves?. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 359-386.
- Rowland, T., & Turner, F. (2007). Developing and using the 'Knowledge Quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, 10(1), 107-124.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: SAGE Publications Ltd.
- Rojas, N. (2013). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).
- Rodríguez López, D. M. (2015). *Las funciones del docente y la disciplina de los Estudiantes de Extra-Edad en situación de riesgo psicosocial en el Centro Preventivo "Divino Niño", turno vespertino, ubicado en el Barrio Jorge Dimitrov Departamento de Managua, II Semestre del año lectivo 2013* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua).
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- Shulman, L. S. (1988). The dangers of dichotomous thinking in education. *Reflection in teacher education*, 31-39.
- Smith, D.C. y D.C. Neale (1989), "The construction of subject matter knowledge in primary science teaching", *Teaching and Teacher Education*, 5(1): 1-20.
- Shulman, L.S. (2004). *The wisdom of practice: Essays on teaching, learning, and learning to teach*. Ed., Suzanne M. Wilson. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Shulman, L. S. (2005). Signature pedagogies in the professions. *Daedalus*, 134(3), 52-59.

- Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation. *Handbook of mathematical cognition*, 197-212.
- Siza, M. (2009). Incidencia de una propuesta didáctica que integra los medios informáticos, desde el enfoque socio-constructivista en el desarrollo de la competencia matemática. *Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Pedagogía. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Recuperado el, 2.*
- Suraña, M. M. D., & Villagrán, M. A. (2017). ESTIMACIÓN EN LA LÍNEA NUMÉRICA Y CÁLCULO ESCRITO Y MENTAL EN ALUMNADO DE 4º Y 5º DE EDUCACIÓN PRIMARIA. *International Journal of Developmental and Educational Psychology. Revista INFAD de Psicología.*, 7(1), 453-462.
- Toranzos, L. (1996). El problema de la calidad en el primer plano de la agenda educativa. *Revista iberoamericana de educación*, (10), 63-78.
- Torp, L., & Sage, S. (1998). El aprendizaje basado en problemas: Desde el jardín de infantes hasta el final de la escuela secundaria. Buenos Aires: Amorrortu editores.
- Tobón, S. T., Prieto, J. H. P., & Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson educación.
- Torreblanca Navarro, O., & Rojas-Drummond, S. (2010). Mediación tecnológica para el desarrollo de habilidades de observación en estudiantes de Psicología: un enfoque socioconstructivista. *Perfiles educativos*, 32(127), 58-84.
- Torres Martín, E., & Deulofeu Piquet, J. (2015). El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad. (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Barcelona).
- Tiposde.com. (2018). Tipos de intervalos. Recuperado Marzo 24, 2018, desde: <https://www.tiposde.com/intervalos.html>
- Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. *Readings on the development of children*, 23(3), 34-41.
- Vygotsky, L. S. (1985). Pensamiento y Lenguaje. Buenos Aires, Pléyade. *ED Revista Electrónica*.
- Vallejo, A. G. (1999.). Aplicación de un procedimiento basado en la zona de desarrollo próximo en la evaluación de dos grupos de niños en tareas matemáticas. *Revista De Educación Nueva Época. No. 9*.
- Valenzuela, J. (2000). Los Tres “Autos” del Aprendizaje Estratégico en Educación a Distancia. *Revista de la Escuela de Graduados en Educación*, 1(2): 3-11.
- Vilchez González, N. M. (2007). *Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia. Aplicación a la primera etapa de educación básica*. Universitat Rovira i Virgili.
- Vite, H. R. (2012). Ambientes de Aprendizaje. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Wenzelburger, E. (1993). Conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5(03), 93-123.
- Zimmerman, B.J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. En M. Boekaerts, P.R. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-40).
- Zamorano Vargas, A., & Deulofeu Piquet, J. (2015). La práctica de la enseñanza de las matemáticas a través de las situaciones de contingencia. (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Barcelona).